ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

226

Ον/μο:…….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη:Συναρτήσεις-Οριο-Κανόνες παραγώγισης **15-11-26**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη για $x>0$, με $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Επίσης ότι δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$. **(μον.7)**

Α2. Πότε μία συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται 1-1; **(μον.5)**

Α3. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Τι ονομάζουμε πρώτη παράγωγο της f; **(μον.5)**

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής, τότε είναι και παραγωγίσιμη».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. **(μον.1)**

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α). **(μον.3)**

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για δύο συναρτήσεις f και g ισχύει ότι: $(fog)(x)=(gof)(x)$.

β) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

γ) $\left(\ln|x|\right)'=-\frac{1}{x},x<0$.

δ) Για κάθε συνάρτηση f, το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα της f, εφόσον υπάρχουν, είναι το ολικό μέγιστο της f. **(μον.4)**

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x)=e^{3x+2}$ και $g(x)=\ln x^2$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f και g. **(μον.3)**

β) Να βρείτε την $g \circ f$. **(μον.6)**

γ) Αν $g(f(x)) = 6x + 4,\ x \in R$, να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \to 0} \frac{(g(f(x)) - \eta\mu^2 x - 4}{x}.$$ **(μον.6)**

Β2. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. **(μον.5)**

β) Να αιτιολογήσετε γιατί αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}. **(μον.5)**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να βρείτε, όπου ορίζεται , την παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 2 \\ x^4, & x \geq 2 \end{cases}.$$ **(μον.8)**

Γ2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} (\alpha^2 - 8) \cdot x^3, & x < 1 \\ \alpha x + 1 - \alpha, & x \geq 1 \end{cases}$.

α) Να βρεθεί ο $\alpha \in R$, ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$. **(μον.9)**

β) Για την τιμή του α του α) ερωτήματος , εξετάστε αν η f αντιστρέφεται .Αν ναι να σχεδιάσετε την C_f^{-1}. **(μον.8)**

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+2x-10$.

α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Να βρεθεί η τιμή $f^{-1}(-10)$.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x)=f(x)$.
Τι παριστάνουν οι λύσεις της ;

δ) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}\left(\frac{3x+1}{x-1}\right)\le 2$. **(μον.16)**

Δ2. Να βρείτε την παράγωγο κάθε μιας συνάρτησης:

α) $f(x)=\frac{1}{4}\cdot \sigma\upsilon\nu^3(3x-2)$

β) $g(x)=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

γ) $f(t)=2^t-x^2+\sigma\varphi t$ **(μον.9)**

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

Α1, Α2, Α3 Θεωρία

Α4. α) Ψ

β) Η $f(x)=|x|$ είναι συνεχής στο στο R αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ γιατί $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1\end{cases}$

Α5. α Λάθος , **β** Λάθος, **γ** Λάθος, **δ** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. α)Η f έχει πεδίο ορισμού το $A_f=R$.

Η g ορίζεται για τα x για τα οποία είναι $x^2>0\Leftrightarrow x\neq 0$.

Αρα $A_g=R^*$.

β)Η $g\circ f$ ορίζεται για τα $\left.\begin{matrix}x\in A_f\\ f(x)\in A_g\end{matrix}\right|\Rightarrow\left.\begin{matrix}x\in R\\ e^{3x+2}\neq 0\end{matrix}\right|\Rightarrow x\in R.$

Αρα $A_{g\circ f}=R$.

γ)Είναι: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(g\circ f)(x)-\eta\mu^2x-4}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x+4-\eta\mu^2x-4}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(6-x\cdot\dfrac{\eta\mu^2x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(6-x\cdot\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right)=6-0\cdot 1^2=\mathbf{6}$

Β2.α)Η f έχει παράγωγο στο $A_f=R$ την

$f'(x)=\left(\dfrac{1}{e^x+1}\right)'=-\dfrac{(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}=-\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}<0$, άρα είναι γνησίως φθίνουσα.

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Για το σύνολο τιμών και απ' την εξίσωση $f(x)=y \Leftrightarrow \frac{1}{e^x+1}=y \overset{y>0}{\Leftrightarrow}$

$e^x+1=\frac{1}{y} \Leftrightarrow e^x=\frac{1}{y}-1$ **(1)**.

Πρέπει $\frac{1}{y}-1>0 \Leftrightarrow \frac{1-y}{y}>0 \Leftrightarrow y\cdot(1-y)>0 \overset{\text{ετεροσ.}}{\Longleftrightarrow} 0<y<1$.

Η (1) γίνεται $\ln e^x=\ln\left(\frac{1}{y}-1\right) \Leftrightarrow x=\ln\frac{1-y}{y}$. **(2)**

Αρα $f(A)=(0,1)$.

β)Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι και 1-1 επομένως αντιστρέφεται. Απ' την (2) προκύπτει ότι

$f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$, με $A_{f^{-1}}=(0,1)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.Επειδή $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^3)=8$, και $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^4)=16$

η f δεν είναι συνεχής στο 2 άρα ούτε παραγωγίσιμη. Είναι λοιπόν:

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2, x<2\\ 4x^3, x>2\end{cases}.$$

Γ2. α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 θα είναι και συνεχής οπότε:

$\lim\limits_{x\to 1^{-1}} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^{+1}} f(x)=f(1) \Rightarrow \alpha^2-8=\alpha+1-\alpha \Leftrightarrow$

$\alpha=-3$ ή $\alpha=3$.

●Για $\alpha=-3$ είναι $f(x)=\begin{cases}x^3, & x<1\\ -3x+4, & x\geq 1\end{cases}$ με

$f'_{\alpha}(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+x+1)=3$ και

$f'_{\delta}(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-3x+4-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-3(x-1)}{x-1}=-3$ οπότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

●Για $\alpha=3$ είναι $f(x)=\begin{cases} x^3, & x<1 \\ 3x-2, & x\geq 1 \end{cases}$ με $f'_{\alpha}(1)=3$ και

$f'_{\delta}(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3x-2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3(x-1)}{x-1}=3.$

Αρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

β) Για α=3 είναι $f(x)=\begin{cases} x^3, & x<1 \\ 3x-2, & x\geq 1 \end{cases}$, συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1 επομένως αντιστρέφεται.

Η C_f είναι γνωστής μορφής επομένως η $C_{f^{-1}}$ είναι η συμμετρική της ως προς την διχοτόμο $y=x$ της πρώτης γωνίας των αξόνων.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.α)Είναι $f'(x)=3x^2+2>0,$ άρα f ↗ και επομένως και 1-1.Αρα αντιστρέφεται.

Είναι δε $A_{f^{-1}}=f(A)=(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))=(-\infty,+\infty)=R$.

β) Είναι $f(0)=-10\Leftrightarrow f^{-1}(f(0))=f^{-1}(-10)\Leftrightarrow f^{-1}(-10)=0.$

γ) $f^{-1}(x)=f(x)\overset{f^{-1}\uparrow}{\Leftrightarrow}f(x)=x\Leftrightarrow x^3+2x-10=x\Leftrightarrow$

$x^3+x-10=0\Leftrightarrow x=2$, μοναδική ρίζα γιατί η $g(x)=x^3+x-10$ είναι γνησίως αύξουσα.

δ) Αρχικά πρέπει $x\neq 1$.

Απ' την $f^{-1}\left(\dfrac{3x+1}{x-1}\right)\leq 2\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f\left(f^{-1}\left(\dfrac{3x+1}{x-1}\right)\right)\leq f(2)=2$

$\Leftrightarrow\dfrac{3x+1}{x-1}-2\leq 0\Leftrightarrow\dfrac{3x+1-2x+2}{x-1}\leq 0\Leftrightarrow\dfrac{x+3}{x-1}\leq 0\Leftrightarrow$

$(x-1)(x+3)\leq 0\Leftrightarrow -3\leq x\leq 1.$ Αρα $-3\leq x<1$.

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Δ2.α) Η f έχει πεδίο ορισμού το A=R στο οποίο είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και έχει παράγωγο την

$$f'(x)=\left[\frac{1}{4}\sigma\upsilon\nu^3(3x-2)\right]'=\frac{1}{4}\cdot 3\cdot\sigma\upsilon\nu^2(3x-2)\cdot(\sigma\upsilon\nu(3x-2))'=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu^2(3x-2)\cdot[-\eta\mu(3x-2)]\cdot(3x-2)'=$$

$$=-\frac{9}{4}\sigma\upsilon\nu^2(3x-2)\cdot\eta\mu(3x-2).$$

β) Πρέπει $\frac{1-x}{1+x}>0\Leftrightarrow(1-x)\cdot(1+x)>0 \overset{\text{ετεροσ.}}{\Longleftrightarrow}-1<x<1$, άρα $A_f=(-1,1)$

Η g γράφεται $g(x)=\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1}{2}[\ln(1-x)-\ln(1+x)]$ οπότε

$$g'(x)=\frac{1}{2}\cdot[(\ln(1-x))'-(\ln(1+x))']=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{(1-x)'}{1-x}-\frac{(1+x)'}{1+x}\right]=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{x+1-x+1}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{1}{x^2-1}.$$

γ) Η $f(t)=2^t-x^2+\sigma\varphi t$ ορίζεται για τα t για τα οποία είναι $t\neq\kappa\pi$ και έχει παράγωγο την

$$f'(t)=(2^t-x^2+\sigma\varphi t)'=(2^t)'-(x^2)'+(\sigma\varphi t)'=2^t\cdot\ln 2-0-\frac{1}{\eta\mu^2 t}=$$

$$=2^t\cdot\ln 2-\frac{1}{\eta\mu^2 t}.$$

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ