

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

101

Ον/μο:.....

Β' Λυκείου

Υλη: Διανύσματα-Ευθεία

21-12-2025

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής: $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ (μον.7)

A2. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

1. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = \dots\dots\dots$

2. Η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι: $\dots\dots\dots$

3. Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ έχει εξίσωση: $\dots\dots\dots$ (μον.3)

A3. Γράψτε τις εξισώσεις των ευθειών που γνωρίζετε. (μον.7)

A4. 1. Βρείτε τη γραμμή στην οποία βρίσκονται τα σημεία

$$A(\kappa, \alpha), \quad B(\lambda, \alpha), \quad \Gamma(\mu, \alpha)$$

2. Τι γωνία (οξεία, αμβλεία, ορθή) σχηματίζει με τον $x'x$ η ευθεία $y = \kappa^2 x + 1$, $\kappa \neq 0$.

3. Να βρείτε τι παριστάνει η εξίσωση $xy = x$.

4. Αν $\vec{\delta} = (A, B) \neq \vec{0}$ και $\vec{v} = (x, y) \neq \vec{0}$ να βρείτε το είδος της γραμμής που παριστάνει η εξίσωση $\vec{\delta} \cdot \vec{v} + \Gamma = 0$. (μον.8)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-1, 2)$, $B(1, 3)$ και $\Gamma(3, -2)$. Βρείτε:

B1. την εξίσωση του ύψους AD (μον.8)

B2. την εξίσωση της διαμέσου BE (μον.8)

B3. την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο τομής K των ευθειών AD και BE και είναι παράλληλη στην ευθεία $B\Gamma$.

(μον.9)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση $(\alpha^2 + 2\alpha)x - (\alpha^2 + \alpha + 1)y - \alpha^2 - 2 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ **(1)**

Γ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ η (1) παριστάνει ευθεία. **(μον.7)**

Γ2. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο. **(μον.6)**

Γ3. Να βρείτε εκείνη την ευθεία (ε) που ορίζεται από την εξίσωση (1) και είναι κάθετη στην ευθεία ε' : $x - y + 3 = 0$ **(μον.6)**

Γ4. Να αποδείξετε ότι η ευθεία η : $y=2x$ δεν ανήκει στην οικογένεια των ευθειών που ορίζεται από την εξίσωση (1). **(μον.6)**

Θέμα Δ:

Οι πλανήτες «Όνειρο», «Ελπίδα», «Ζωή» αποτελούν κορυφές ενός «διαστημικού» τριγώνου με συντεταγμένες αντίστοιχα $O(2,3)$, $E(4,1)$, και $Z(5\lambda - 1, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\lambda \neq 1$. Ο πλανήτης «επιτυχία» ικανοποιεί την ισότητα $OE = 2EN$ **(1)** όπου N ο πλανήτης «Νίκη» που βρίσκεται στο μέσο της απόστασης των «Ελπίδα» και «Ζωή».

Δ1. Να δείξετε, με τη βοήθεια της σχέσης (1), ότι οι συντεταγμένες του πλανήτη «Επιτυχία» είναι: $E\left(\frac{5\lambda + 5}{3}, \frac{\lambda + 4}{3}\right)$ **(μον.10)**

Δ2. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του πλανήτη αυτού. **(μον.10)**

Δ3. Τον Ιούνιο του 2027, σ' ένα όμορφο σας ταξίδι, βρίσκεστε στη θέση $\Sigma(5,2)$. Συναντάτε την πορεία της «επιτυχίας»; **(μον.10)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία

A2. 1. $\vec{\delta} = (B, -A)$ 2. $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ 3. $x = x_0$

A3. 1. $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$

6. $x = x_0$

2. $y = \lambda x + \beta$

7. $Ax + By + \Gamma = 0, A \neq 0$ ή $B \neq 0$

3. $y = \lambda x$

4. $y = \beta$

5. $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

A4. 1. $y = \alpha$

2. Επειδή $\kappa^2 > 0$ η γωνία της ευθείας είναι οξεία.

3. $xy = x \Leftrightarrow xy - x = 0 \Leftrightarrow x(y - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $y = 1$ άρα η εξίσωση παριστάνει τις δύο αυτές ευθείες.

4. Είναι $\vec{\delta} \cdot \vec{\gamma} = 0 \Leftrightarrow Ax + By + \Gamma = 0, A \neq 0, B \neq 0$ άρα η εξίσωση παριστάνει ευθεία.

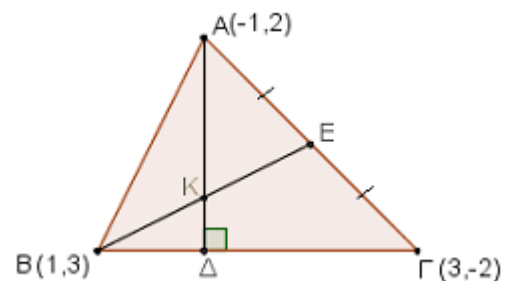
ΘΕΜΑ Β

B1. Επειδή $AD \perp BG \Rightarrow \lambda_{AD} \cdot \lambda_{BG} = -1$

$$\Rightarrow \lambda_{AD} \cdot \frac{-2-3}{3-1} = -1 \Rightarrow \lambda_{AD} = \frac{2}{5}$$

οπότε $AD : y - 2 = \frac{2}{5}(x + 1) \Rightarrow$

$AD : 2x - 5y + 12 = 0$



B2. Αφού το E είναι μέσο της ΑΓ θα είναι $E\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{2-2}{2}\right) \Rightarrow E(1,0)$.

Τα σημεία E και B έχουν την ίδια τετμημένη $x=1$. Η BE επομένως είναι κατακόρυφη και έχει εξίσωση $BE : x=1$.

B3. Η ΑΔ για $x=1$ γίνεται $2 \cdot 1 - 5y + 12 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{14}{5}$. Άρα $K\left(1, \frac{14}{5}\right)$.

Η παράλληλη απ' το K στην ΒΓ, έστω (ε), έχει $\lambda_\varepsilon = \lambda_{BG} = \frac{-2-3}{3-1} = -\frac{5}{2}$

οπότε $\varepsilon : y - \frac{14}{5} = -\frac{5}{2}(x-1) \Rightarrow \varepsilon : 25x + 10y - 53 = 0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η (1) είναι της μορφής

$Ax + By + \Gamma = 0$ με $A = \alpha^2 + 2\alpha$ και $B = -(\alpha^2 + \alpha + 1)$. Το $\alpha^2 + \alpha + 1$ έχει $\Delta = -3 < 0$ άρα δεν μηδενίζεται για κανένα α .
Η (1) λοιπόν είναι ευθεία.

Γ2. Η (1) γράφεται $\alpha^2 x + 2\alpha x - \alpha^2 y - \alpha y - y - \alpha^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$(x - y - 1)\alpha^2 + (2x - y)\alpha - y - 2 = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, οπότε θα είναι:

$$\begin{array}{l|l} x - y - 1 = 0 & -1 - (-2) - 1 = 0 \\ 2x - y = 0 & \Leftrightarrow x = -1 \\ -y - 2 = 0 & y = -2 \end{array} \quad \text{Αρα η (1) είναι οικογένεια}$$

ευθειών που διέρχονται απ' το σημείο $M(-1, -2)$

Γ3. Η κάθετη στην (ε') έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -1$ οπότε πρέπει

$$\lambda_\alpha = -1 \Rightarrow -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{-(\alpha^2 + \alpha + 1)} = -1 \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha = -\alpha^2 - \alpha - 1 \Leftrightarrow$$

$$2\alpha^2 + 3\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1 \text{ ή } \alpha = -\frac{1}{2}.$$

Για $\alpha = -1$ ή $\alpha = -\frac{1}{2}$ η (1) δίνει την $x + y + 3 = 0$.

2^{ος} τρόπος

Η κάθετη στην (ε') έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -1$. Αφού είναι ευθεία της οικογένειας (1) διέρχεται απ' το σημείο $M(-1, -2)$. Έχει λοιπόν εξίσωση $y - (-2) = -1(x + 1)$ δηλ. $x + y + 3 = 0$

Γ4. Η $y = 2x$ διέρχεται απ' την αρχή των αξόνων.

Η (1) διέρχεται απ' την αρχή των αξόνων αν $-a^2 - 2 = 0$, αδύνατο.

Καμία λοιπόν ευθεία της (1) δεν διέρχεται απ' το Ο.

Η $y = 2x$ επομένως δεν ανήκει στην οικογένεια της (1).

Θέμα Δ

Δ1. Αφού Ν μέσο του ΕΖ είναι $N(\frac{5\lambda + 3}{2}, \frac{\lambda + 1}{2})$

Εστω $\Xi(x, y)$. Απ' την ισότητα $\overrightarrow{ΟΞ} = 2\overrightarrow{ΕΝ}$, προκύπτει ότι:

$$(x - 2, y - 3) = 2\left(\frac{5\lambda + 3}{2} - x, \frac{\lambda + 1}{2} - y\right) = (5\lambda + 3 - x, \lambda + 1 - 2y) \Leftrightarrow$$

$$x - 2 = 5\lambda + 3 - 2x \text{ και } y - 3 = \lambda + 1 - 2y \text{ άρα } x = \frac{5\lambda + 5}{3}, y = \frac{\lambda + 4}{3}$$

$$\text{και } \Xi\left(\frac{5\lambda + 5}{3}, \frac{\lambda + 4}{3}\right)$$

Δ2. Αφού $x = \frac{5\lambda + 5}{3}, y = \frac{\lambda + 4}{3} \Leftrightarrow \lambda = \frac{3x - 5}{5}$ και $\lambda = 3y - 4$ οπότε:

$$\frac{3x - 5}{5} = 3y - 4 \Leftrightarrow 3x - 5 = 15y - 20 \Leftrightarrow 3x - 15y + 15 = 0 \Leftrightarrow x - 5y + 5 = 0$$

Η ευθεία αυτή είναι ο γ. τ. του πλανήτη Ξ .

Δ3. Το σημείο $\Sigma(5, 2)$ επαληθεύει την παραπάνω ευθεία, άρα συναντάμε την πορεία της επιτυχίας.