

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

32

Ον/μο:.....

Γ' Λυκείου(ΕΠΑ.Λ)

Υλη: Διαφορικός Λογισμός

02-11-25

Θέμα 1^ο:

A. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; (5 μον.)

B. Πότε μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; (5 μον.)

Γ. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ είναι η $f'(x) = 2x$. (5 μον.)

Δ. Να χαρακτηρίσετε με (Σ) Σωστό ή (Λ) Λάθος τις παρακάτω προτάσεις :

i. $[\eta\mu(x^2 + 1)]' = 2x\sigma\upsilon\nu(x^2 + 1)$. Σ Λ

ii. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^2 - 5}{x + 7}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{-7\}$. Σ Λ

iii. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$. Σ Λ

iv. Η συνάρτηση $f(x) = x - 2$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία. Σ Λ
(4x1=4 μον.)

Ε. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

i. $\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x - 4\right)' = \dots\dots\dots$

ii. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \dots\dots\dots$ (2x3=6 μον.)

Θέμα 2^ο:

A. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^2}{x^3 - 3x^2 + 2x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{\sqrt{x} - \sqrt{5}}$

(2x5=10μον.)

B. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1}, & x \neq 1 \\ x^2 - \frac{x}{2}, & x = 1 \end{cases}$.

i. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και το $f(1)$.

(7 μον.)

ii. Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

(8 μον.)

Θέμα 3^ο:

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 - \kappa x + 2$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

A. Να υπολογίσετε την τιμή του κ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να τέμνει τον άξονα $x'Ox$ στο σημείο με τετμημένη 1.

(5 μον.)

B. Για $\kappa = 3$:

i. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1}$.

ii. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (15 μον.)

iii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(2, f(2))$.

(5 μον.)

Θέμα 4^ο:

A. Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα και το x σε μέτρα.

- i.** Να βρεθεί η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο t . (3 μον.)
- ii.** Να βρεθεί η επιτάχυνση του σημείου σε χρόνο t . (3 μον.)
- iii.** Πότε το σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο; (3 μον.)
- iv.** Πότε το σώμα κινείται στη θετική και πότε στην αρνητική κατεύθυνση; (3 μον.)
- v.** Να βρεθεί το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το σημείο στη διάρκεια των πρώτων 5s. (3 μον.)

B. Από όλα τα ορθογώνια με εμβαδό 100m^2 ποιο είναι εκείνο που έχει τη μικρότερη περίμετρο; (10 μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (ενδεικτικές)

Θέμα 1^ο:

A. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

B. Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Γ. Είναι:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x_0h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x_0 + h)}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) &= 2x_0 \end{aligned}$$

A. i. Σ ii. Σ iii. Λ iii. Λ

E. i. $\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x - 4 \right)' = x^2 - 5x + 7$.

ii. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$.

Θέμα 2^ο:

A.i.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^2}{x^3 - 3x^2 + 2x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(1 - x)}{x(x^2 - 3x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(1 - x)}{x(x - 1)(x - 2)} = \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x - 2)} &= 1. \end{aligned}$$

ii.

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{\sqrt{x} - \sqrt{5}} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x(x-5)(\sqrt{x} + \sqrt{5})}{(\sqrt{x} - \sqrt{5})(\sqrt{x} + \sqrt{5})} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x(x-5)(\sqrt{x} + \sqrt{5})}{(x-5)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} x(\sqrt{x} + \sqrt{5}) = 10\sqrt{5}.$$

B. Έχουμε την $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}, & x \neq 1 \\ x^2 - \frac{x}{2}, & x = 1 \end{cases}.$

i.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2+3})^2 - 4}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3 - 4}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)}{(\sqrt{x^2+3}+2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{και } f(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

ii. Εφόσον, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Θέμα 3^ο:

A. Έχουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - \kappa x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Για να τέμνει η $f(x)$ τον άξονα x ' x στο 1 πρέπει:

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - \kappa + 2 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 3.$$

B. Για $\kappa=3$ έχουμε $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

$$\begin{aligned} \text{i. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x - 2x + 2}{x^2 - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^2 - 1) - 2(x - 1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)(x + 1) - 2(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x - 2)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x - 2)}{(x + 1)} = \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

ii. $\rightarrow$ Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x) = 3x^2 - 3$.

$\rightarrow$ Λύνουμε την εξίσωση: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

$\rightarrow$ Ο πίνακας προσήμων της f' είναι:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
f'	+	○	-	○	+
f	↗	↘	↗		

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$. Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=-1$ το $f(-1) = -1 + 3 + 2 = 4$ και τοπικό ελάχιστο για $x=1$ το $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$.

iii. Είναι: $f(2) = 8 - 6 + 2 = 4$ και $f'(2) = 12 - 3 = 9$. Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $M(2, f(2))$ είναι:

$$\varepsilon: y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - 4 = 9(x - 2) \Leftrightarrow$$

$$y = 9x - 18 + 4 \Leftrightarrow y = 9x - 14.$$

Θέμα 4^ο:

A. i. Η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο t είναι:

$$u(t) = x'(t) = (t^3 - 6t^2 + 9t)' = 3t^2 - 12t + 9.$$

ii. Η επιτάχυνση του σημείου σε χρόνο t είναι:

$$a(t) = u'(t) = x''(t) = (3t^2 - 12t + 9)' = 6t - 12.$$

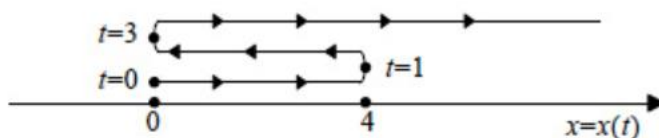
iii. Το σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο όταν:

$$u(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 12t + 9 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1s \text{ ή } t = 3s.$$

iv. Το σώμα κινείται κατά τη θετική κατεύθυνση όταν:

$$u(t) > 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 12t + 9 > 0 \Leftrightarrow t < 1s \text{ ή } t > 3s \text{ και κατά την αρνητική κατεύθυνση όταν: } u(t) < 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 12t + 9 < 0 \Leftrightarrow 1 < t < 3.$$

Σχηματικά η κίνηση του υλικού σημείου παριστάνεται ως εξής:



v. Η απόσταση που διανύθηκε από το κινούμενο σημείο είναι:

* Στη διάρκεια του πρώτου δευτερολέπτου:

$$S_1 = |x(1) - x(0)| = |4 - 0| = 4m.$$

* Από $t=1$ μέχρι $t=3$ είναι: $S_2 = |x(3) - x(1)| = |0 - 4| = 4m.$

* Από $t=3$ μέχρι $t=5$ είναι: $S_3 = |x(5) - x(3)| = |20 - 0| = 20m.$

Άρα, το ολικό διάστημα S που διάνυσε το σημείο σε χρόνο 5s είναι: $S = S_1 + S_2 + S_3 = 4 + 4 + 20 = 28m.$

B. Έστω ένα ορθογώνιο με διαστάσεις x, y και εμβαδό $100m^2$. Τότε, θα είναι $x \cdot y = 100 \Leftrightarrow y = \frac{100}{x}$. Η περίμετρος του ορθογωνίου θα είναι,

$$\Pi = 2x + 2y \text{ δηλαδή, } \Pi(x) = 2x + \frac{200}{x} \text{ με } x > 0.$$

* Η $\Pi(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων με:

$$\Pi'(x) = \left(2x + \frac{200}{x} \right)' = 2 - \frac{200}{x^2}.$$

* Λύνουμε την εξίσωση: $\Pi'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 = \frac{200}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow x = 10.$

* Ο πίνακας προσήμων της $\Pi'(x)$ είναι:

x	0	10	$+\infty$
Π'	-		+
Π	$\searrow$		$\nearrow$

Σύμφωνα με τον πίνακα το ζητούμενο ορθογώνιο είναι το τετράγωνο με πλευρά 10.