

113

Ύλη : Πραγματικοί αριθμοί - Εξισώσεις

Α' Λυκείου

Ον/μο:.....

21-12-25

Θέμα 1^ο:

A. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

Πότε ισχύει η ισότητα;

(5 μον.)

B. Τι ονομάζεται τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α ;

(5 μον.)

Γ. Να λύσετε την εξίσωση: $x^v = \alpha$.

(5 μον.)

Δ. Να χαρακτηρίσετε με (Σ) Σωστό ή (Λ) Λάθος τις παρακάτω προτάσεις :

i. Αν $\alpha < 0$, τότε $|\alpha| = \alpha$.

Σ Λ

ii. $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Σ Λ

iii. $5^{25} > 25^5$.

Σ Λ

iv. Η εξίσωση $(\alpha - 1) \cdot x = \alpha(\alpha - 1)$ έχει μοναδική λύση $x = \alpha$.

Σ Λ

v. Για οποιουσδήποτε $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta$.

Σ Λ

(5x2=10 μον.)

Θέμα 2^ο:

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει:

· $|\alpha| \leq 1$

· $|\beta - 1| \leq 1$

A. Να αποδείξετε ότι : $-1 \leq \alpha \leq 1$ και $0 \leq \beta \leq 2$.

(5 μον.)

Επιπλέον δίνεται η παράσταση : $A = |\alpha - 1| + |\alpha + 1| + |\beta| + |\beta - 3|$.

B. Να αποδείξετε ότι: $A=5$.

(7 μον.)

Γ. Να γράψετε την παράσταση $\frac{2024}{\sqrt{A} - 2} + \frac{2025}{2 - \sqrt{A}}$ ως ισοδύναμη

χωρίς άρρητους παρονομαστές.

(5 μον.)

Δ. Να αποδείξετε ότι :

i. $-2 \leq 2\alpha + 3\beta \leq 8$ και ii. $-3 \leq \alpha - \beta \leq 1$

(6 μον.)

Θέμα 3^ο:**A.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\frac{x-3}{12} - \frac{x-1}{6} = \frac{x+2}{3} - 1$

ii. $3x^2 - 4x = x^2 - 2x$

iii. $\frac{15}{x-2} - \frac{4}{x+2} = \frac{5}{x^2-4}$

iv. $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = |2x - 7|$ (4x3=12 μον.)

B. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \left[(2^{16} \cdot 2^8)^{-1} \cdot 2^{24} \right]^{2026} \text{ και } B = \left(-\frac{3^{-15} \cdot 9^{-12}}{3^{-39}} \right)^{2025}.$$

i. Να αποδείξετε ότι: $A=1$ και $B=-1$. (7 μον.)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $\lambda^2 x - 2A\lambda = 2\lambda x + 4B$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$. (6 μον.)

Θέμα 4^ο:**A.** Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ και

$$A = \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{\delta} + 2 \right)^{2025} + \left(\frac{\beta + \gamma + \delta}{-\alpha} - 2 \right)^{2026} + \left(\frac{\alpha + \gamma + \delta}{\beta} + 2 \right)^{2027} \text{ τότε:}$$

i. να αποδείξετε ότι $A=3$. (7 μον.)

ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt{A + \sqrt{A + \sqrt{30 + A}}}$ και A . (6 μον.)

iii. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων $d(x, -1) \geq 2$ και $|x - A| < 1$. (7 μον.)

B. Ένας πατέρας είναι σήμερα 44 ετών κι ο γιος του είναι 8.

Μετά από πόσα χρόνια η ηλικία του πατέρα θα είναι τριπλάσια της ηλικίας του γιου; (5 μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

Θέμα 1^ο:

A. Σχ. Βιβλίο

B. Σχ. Βιβλίο

Γ. Σχ. Βιβλίο

Δ. i. Λ ii. Λ iii. Σ iv. Λ v. Λ

Θέμα 2^ο:

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει:

$$\cdot |\alpha| \leq 1$$

$$\cdot |\beta - 1| \leq 1$$

A. Είναι:

$$\cdot |\alpha| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \alpha \leq 1$$

$$\cdot |\beta - 1| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \beta - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \beta \leq 2$$

B. Έχουμε:

$$A = |\alpha - 1| + |\alpha + 1| + |\beta| + |\beta - 3|$$

$$A = \left| \begin{smallmatrix} \alpha - 1 \\ \leq 0 \end{smallmatrix} \right| + \left| \begin{smallmatrix} \alpha + 1 \\ \geq 0 \end{smallmatrix} \right| + \left| \begin{smallmatrix} \beta \\ \geq 0 \end{smallmatrix} \right| + \left| \begin{smallmatrix} \beta - 3 \\ \leq 0 \end{smallmatrix} \right|$$

$$A = -\alpha + 1 + \alpha + 1 + \beta - \beta + 3 = 5$$

$$\Gamma. \text{ Είναι: } \frac{2024}{\sqrt{A} - 2} + \frac{2025}{2 - \sqrt{A}} = \frac{2024}{\sqrt{5} - 2} + \frac{2025}{2 - \sqrt{5}} =$$

$$\frac{2024}{(\sqrt{5} - 2)} - \frac{2025}{(\sqrt{5} - 2)} = \frac{-1}{\sqrt{5} - 2} = \frac{-1 \cdot (\sqrt{5} + 2)}{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)} = \frac{-\sqrt{5} - 2}{5 - 4} =$$

$$= -2 - \sqrt{5}$$

Δ. i. Είναι:

$$\left. \begin{array}{l} -1 \leq \alpha \leq 1 \\ 0 \leq \beta \leq 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -2 \leq 2\alpha \leq 2 \\ 0 \leq 3\beta \leq 6 \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} \Leftrightarrow -2 \leq 2\alpha + 3\beta \leq 8$$

ii. Έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} -1 \leq \alpha \leq 1 \\ 0 \leq \beta \leq 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \cdot (-1) \\ \cdot (-1) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq \alpha \leq 1 \\ 0 \geq -\beta \geq -2 \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq \alpha \leq 1 \\ -2 \leq -\beta \leq 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} \Leftrightarrow -3 \leq \alpha - \beta \leq 1$$

Θέμα 3^ο:

A.i.

$$\frac{x-3}{12} - \frac{x-1}{6} = \frac{x+2}{3} - 1 \Leftrightarrow 12 \cdot \frac{x-3}{12} - 12 \cdot \frac{x-1}{6} = 12 \cdot \frac{x+2}{3} - 12 \Leftrightarrow$$

$$x-3-2(x-1)=4(x+2)-12 \Leftrightarrow x-3-2x+2=4x+8-12 \Leftrightarrow$$

$$x-2x-4x=8-12+3-2 \Leftrightarrow -5x=-3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{5}$$

ii. $3x^2 - 4x = x^2 - 2x \Leftrightarrow 3x^2 - x^2 - 4x + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow$
 $2x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1$

iii. Επίσης:

$$\frac{15}{x-2} - \frac{4}{x+2} = \frac{5}{x^2-4} \Leftrightarrow \frac{15}{x-2} - \frac{4}{x+2} = \frac{5}{(x-2)(x+2)} \Leftrightarrow$$

$$(x-2)(x+2) \frac{15}{x-2} - (x-2)(x+2) \frac{4}{x+2} = (x-2)(x+2) \frac{5}{(x-2)(x+2)} \Leftrightarrow$$

$$15(x+2) - 4(x-2) = 5 \Leftrightarrow 15x + 30 - 4x + 8 = 5 \Leftrightarrow 15x - 4x = 5 - 8 - 30 \Leftrightarrow$$

$$11x = -33 \Leftrightarrow x = -3$$

iv. Είναι:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} = |2x - 7| \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2} = |2x - 7| \Leftrightarrow |x-3| = |2x-7| \Leftrightarrow$$

$$x-3 = 2x-7 \Leftrightarrow x-2x = -7+3 \Leftrightarrow -x = -4 \Leftrightarrow x = 4$$

ή

$$x-3 = -2x+7 \Leftrightarrow x+2x = 7+3 \Leftrightarrow 3x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$$

B. i. Έχουμε:

$$A = \left[(2^{16} \cdot 2^8)^{-1} \cdot 2^{24} \right]^{2026} = \left[(2^{24})^{-1} \cdot 2^{24} \right]^{2026} = \left[2^{-24} \cdot 2^{24} \right]^{2026} = (2^0)^{2026} = 1$$

$$\text{και } B = \left(-\frac{3^{-15} \cdot 9^{-12}}{3^{-39}} \right)^{2025} = \left(-\frac{3^{-15} \cdot (3^2)^{-12}}{3^{-39}} \right)^{2025} = \left(-\frac{3^{-15} \cdot 3^{-24}}{3^{-39}} \right)^{2025} =$$

$$\left(-\frac{3^{-15} \cdot 3^{-24}}{3^{-39}} \right)^{2025} = \left(-\frac{3^{-39}}{3^{-39}} \right)^{2025} = (-1)^{2025} = -1$$

ii. Είναι: $\lambda^2 x - 2A\lambda = 2\lambda x + 4B \Leftrightarrow \lambda^2 x - 2\lambda = 2\lambda x - 4 \Leftrightarrow$

$$\lambda^2 x - 2\lambda x = 2\lambda - 4 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 2)x = 2(\lambda - 2) \quad (1)$$

* Αν $\lambda(\lambda - 2) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 2$ τότε η εξίσωση έχει μοναδική

$$\text{λύση την } x = \frac{2(\lambda - 2)}{\lambda(\lambda - 2)} \Leftrightarrow x = \frac{2}{\lambda}$$

* Αν $\lambda(\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = 2$ τότε:

→ Αν $\lambda = 0$ τότε η (1) $\Rightarrow 0x = -4$ αδύνατη

→ Αν $\lambda = 2$ τότε η (1) $\Rightarrow 0x = 0$ ταυτότητα.

Θέμα 4^ο:

A. i. Εφόσον $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ τότε $\alpha + \beta + \gamma = -\delta$, $\beta + \gamma + \delta = -\alpha$

και $\alpha + \gamma + \delta = -\beta$ οπότε:

$$A = \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{\delta} + 2 \right)^{2025} + \left(\frac{\beta + \gamma + \delta}{-\alpha} - 2 \right)^{2026} + \left(\frac{\alpha + \gamma + \delta}{\beta} + 2 \right)^{2027}$$

$$A = \left(\frac{-\delta}{\delta} + 2 \right)^{2025} + \left(\frac{-\alpha}{-\alpha} - 2 \right)^{2026} + \left(\frac{-\beta}{\beta} + 2 \right)^{2027}$$

$$A = (-1 + 2)^{2025} + (1 - 2)^{2026} + (-1 + 2)^{2027} = 1^{2025} + (-1)^{2026} + 1^{2027}$$

$$A = 1 + 1 + 1 = 3$$

ii. Έστω: $\sqrt{A + \sqrt{A + \sqrt{30 + A}}} < A \Leftrightarrow \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{30 + 3}}} < 3 \Leftrightarrow$

$$\left(\sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{30 + 3}}} \right)^2 < 3^2 \Leftrightarrow 3 + \sqrt{3 + \sqrt{30 + 3}} < 9 \Leftrightarrow \sqrt{3 + \sqrt{30 + 3}} < 6$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3 + \sqrt{30 + 3}} \right)^2 < 6^2 \Leftrightarrow 3 + \sqrt{30 + 3} < 36 \Leftrightarrow \sqrt{33} < 33 \Leftrightarrow 33 < 33^2$$

που ισχύει.

iii. Είναι:

$$d(x, -1) \geq 2 \Leftrightarrow |x + 1| \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$x + 1 \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 1$$

ή

$$x + 1 \leq -2 \Leftrightarrow x \leq -3$$

$$\text{και } |x - 3| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - 3 < 1 \Leftrightarrow 2 < x < 4$$

Επομένως, $x \in (2, 4)$.

Β. Έστω x τα χρόνια που θα περάσουν. Τότε:

$$44 + x = 3(8 + x) \Leftrightarrow 44 + x = 24 + 3x \Leftrightarrow -2x = -20 \Leftrightarrow x = 10$$

Οπότε μετά από 10 χρόνια η ηλικία του πατέρα θα είναι τριπλάσια της ηλικίας του γιού.

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ