

Ον/μο:.....

Ύλη: Συστήματα- Ιδιότητες συναρτήσεων - Τριγωνομετρία

Θέμα 1^ο:

A.i. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A λέγεται περιοδική στο A ;

(7 μον.)

ii. Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$.

(8 μον.)

iii. Τι ονομάζουμε τριγωνομετρικό κύκλο ;

(5 μον.)

B. Να χαρακτηρίσετε με (**Σ**) Σωστό ή (**Λ**) Λάθος τις παρακάτω προτάσεις :

i. Το σύστημα $\begin{cases} x \cdot \eta\mu\theta + y \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 1 \\ -x \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + y \cdot \eta\mu\theta = 2 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση. **Σ** **Λ**

ii. Η συνάρτηση $f(x) = 3x^2$ είναι άρτια . **Σ** **Λ**

iii. Η συνάρτηση $g(x) = \sigma\upsilon\nu 5x$ έχει περίοδο $T = \frac{\pi}{5}$. **Σ** **Λ**

iv. Ισχύει ότι : $\sigma\upsilon\nu\left(30\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. **Σ** **Λ**

v. Η συνάρτηση $\varphi(x-3)+2$ είναι μετατόπιση της φ κατά 3 μονάδες δεξιά και 2 μονάδες πάνω . **Σ** **Λ**

(5x1=5 μον.)

Θέμα 2^ο:

A. Ο Κώστας καταθέτει σε μία τράπεζα 15 χαρτονομίσματα των 20€ και 50€. Συμβολίζουμε με x και y το πλήθος των χαρτονομισμάτων των 20€ και 50€ αντίστοιχα.

i. Δίνονται οι εξισώσεις: 1. $y=15-x$ 2. $y-x=15$

Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει τη σχέση των x και y .

(4 μον.)

ii. Η συνολική αξία των χρημάτων είναι 480€. Δίνονται ακόμα οι εξισώσεις: 3. $50y-20x=480$ 4. $20x+50y=480$

Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει τη συνολική αξία των χρημάτων σε σχέση με τα x και y .

(4 μον.)

iii. Να βρείτε πόσα χαρτονομίσματα των 20€ και 50€ κατέθεσε ο Κώστας.

(5 μον.)

B. Να λύσετε το σύστημα:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x-2y}{2} - \frac{3y-1}{4} &= -x+5 \\ 1-2x(y-1) &= 3x-y(2x-1) \end{aligned} \right\} \quad (12 \text{ μον.})$$

Θέμα 3^ο:

A. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

- i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- ii. Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία.
- iii. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης.
- iv. Να εξετασθεί η συνάρτηση ως προς τις συμμετρίες.

(4x5=20 μον.)

B. Έστω οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = x^3$ και

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 7.$$

- i. Να βρείτε πόσες μονάδες κατακορύφως και πόσες οριζοντίως, έχει μετατοπιστεί η C_g σε σχέση με την C_f .
- ii. Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως αύξουσες.

(2x2.5=5 μον.)

Θέμα 4^ο:

A. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\sin x - \eta \mu x - 1}{1 - \eta \mu x - \sin x} = \frac{1 + \eta \mu x + \sin x}{\sin x - \eta \mu x + 1}$. (5 μον.)

B. i. Να αποδείξετε ότι:

$$-\frac{3}{2} \varepsilon \varphi \frac{7\pi}{4} \cdot \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right) \right] - \eta \mu \frac{3\pi}{2} = 3\eta \mu 4x + 1$$

(4 μον.)

ii. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = -\frac{3}{2} \varepsilon \varphi \frac{7\pi}{4} \cdot \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right) \right] - \eta \mu \frac{3\pi}{2}.$$

Να γίνει η μελέτη αυτής της συνάρτησης σε διάστημα μίας περιόδου.

(7 μον.)

Γ. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i. } \sigma \varphi x = -\sqrt{3} \quad \text{ii. } \eta \mu \left(2x + \frac{\pi}{7} \right) = \frac{1}{2} \quad \text{iii. } 2\sigma \nu^2 x - 9\sigma \nu x + 4 = 0$$

(3x3=9 μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1^ο:

A. Σχ. Βιβλίο

B. Σχ. Βιβλίο

Γ. Σχ. Βιβλίο

Δ. i.Σ ii.Σ iii. Λ iv.Σ v.Σ

Θέμα 2^ο:

A. i. Όλα τα χαρτονομίσματα είναι 15, οπότε το άθροισμα των x και y είναι 15, οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι $x+y=15$.

ii. Τα x χαρτονομίσματα των 20€ έχουν αξία $20x$. αντίστοιχα τα y χαρτονομίσματα των 50€ έχουν αξία $50y$. Η συνολική αξία είναι 480€, οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι $20x+50y=480$.

iii.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 15 \\ 20x + 50y = 480 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} y = 15 - x \\ 20x + 50y = 480 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} y = 15 - x \\ 20x + 50(15 - x) = 480 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 15 - x \\ 20x + 750 - 50x = 480 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} y = 15 - x \\ -30x = -270 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} y = 6 \\ x = 9 \end{array} \right)$$

Επομένως ο Κώστας έχει 9 χαρτονομίσματα των 20€ και 6 χαρτονομίσματα των 50€.

B. $\frac{x-2y}{2} - \frac{3y-1}{4} = -x+5$ $\left\{ \begin{array}{l} \cdot 4 \quad 2(x-2y) - (3y-1) = -4x+20 \\ 1-2x(y-1) = 3x-y(2x-1) \end{array} \right\} \Leftrightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} 2x-4y-3y+1 = -4x+20 \\ -2xy+2x-3x+2xy-y = -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 2x-4y-3y+4x = 20-1 \\ -x-y = -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 6x-7y=19 \\ -x-y=-1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 6x-7y=19 \\ \cdot 6 \quad -6x-6y=-6 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} (-) \quad -13y=13 \\ -x-y=-1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} y=-1 \\ -x+1=-1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{l} y = -1 \\ x = 2 \end{array} \right)$$

Θέμα 3^ο:

A. Δίνεται η $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

i. Για να ορίζεται η f πρέπει:

$$\underbrace{1-x^2 \geq 0}_{x=1 \text{ ή } x=-1} \Leftrightarrow \overset{\text{ετερ. του } \alpha}{-1 \leq x \leq 1}. \text{ Οπότε: } A = [-1, 1].$$

ii. $\rightarrow$ Έστω $x_1, x_2 \in [-1, 0]$ με $x_1 < x_2$. Τότε:

$$\begin{aligned} \mathbf{x_1 < x_2} &\Leftrightarrow x_1^2 > x_2^2 \Leftrightarrow -x_1^2 < -x_2^2 \Leftrightarrow 1-x_1^2 < 1-x_2^2 \Leftrightarrow \\ &\sqrt{1-x_1^2} < \sqrt{1-x_2^2} \Leftrightarrow \mathbf{f(x_1) < f(x_2)}. \end{aligned}$$

Δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα σ' αυτό το διάστημα.

$\rightarrow$ Έστω $x_1, x_2 \in [0, 1]$ με $x_1 < x_2$. Τότε:

$$\begin{aligned} \mathbf{x_1 < x_2} &\Leftrightarrow x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow -x_1^2 > -x_2^2 \Leftrightarrow 1-x_1^2 > 1-x_2^2 \Leftrightarrow \\ &\sqrt{1-x_1^2} > \sqrt{1-x_2^2} \Leftrightarrow \mathbf{f(x_1) > f(x_2)}. \end{aligned}$$

Δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα σ' αυτό το διάστημα.

iii. Είναι: $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 \leq 0 \Leftrightarrow 1-x^2 \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \leq 1$.

Επομένως, η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το 1 για $x=0$.

Επίσης, η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = \pm 1$ το $y=0$.

iv. Το πεδίο ορισμού της f είναι $A = [-1, 1]$. Οπότε

$\forall x \in A$ το $-x \in A$. Επίσης,

$$\mathbf{f(-x) = \sqrt{1-(-x)^2} = \sqrt{1-x^2} = f(x)}. \text{ Άρα η } f \text{ είναι άρτια.}$$

B. Έχουμε τις συναρτήσεις f, g με $f(x) = x^3$ και $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 7$ που ορίζονται σε όλο το $\mathbb{R}$.

i. Είναι: $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 7 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 6 = (x-1)^3 - 6$, επομένως η γραφική παράσταση της g είναι μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 1 μονάδα δεξιά και 6 μονάδες κάτω.

ii. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τότε: $\mathbf{x_1 < x_2} \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow \mathbf{f(x_1) < f(x_2)}$ δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα. Το ίδιο θα ισχύει και για την g εφόσον η γραφική της παράσταση είναι μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f .

Θέμα 4^ο:

A. $\frac{\sin x - \eta \mu x - 1}{1 - \eta \mu x - \sin x} = \frac{1 + \eta \mu x + \sin x}{\sin x - \eta \mu x + 1} \Leftrightarrow$
 $(\sin x - \eta \mu x - 1)(\sin x - \eta \mu x + 1) = (1 - \eta \mu x - \sin x)(1 + \eta \mu x + \sin x) \Leftrightarrow$
 $(\sin x - \eta \mu x)^2 - 1 = 1 - (\eta \mu x + \sin x)^2 \Leftrightarrow$
 $\sin^2 x - 2\eta \mu x \sin x + \eta^2 x - 1 = 1 - \eta^2 x - 2\eta \mu x \sin x - \sin^2 x \Leftrightarrow$
 $0 = 1 - 1 \Leftrightarrow 0 = 0$ που ισχύει.

B. i. $-\frac{3}{2} \varepsilon \varphi \frac{7\pi}{4} \cdot \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} - 4x \right) - \sin \left(\frac{\pi}{2} + 4x \right) \right] - \eta \mu \frac{3\pi}{2} =$
 $-\frac{3}{2} \varepsilon \varphi \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} - 4x \right) - \sin \left(\frac{\pi}{2} + 4x \right) \right] - \eta \mu \frac{3\pi}{2} =$
 $\frac{3}{2} \varepsilon \varphi \frac{\pi}{4} \cdot (\eta \mu 4x + \eta \mu 4x) + 1 = \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot 2\eta \mu 4x + 1 = 3\eta \mu 4x + 1$

ii. Σύμφωνα με το i. ερώτημα είναι $f(x) = 3\eta \mu 4x + 1$.

* Η f έχει πεδίο ορισμού το $A_f = \mathbb{R}$.

* Η f έχει σύνολο τιμών το $B = [-2, 4]$.

* Η f είναι γν.αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{8} \right]$ και στο $\left[\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2} \right]$, ενώ είναι
 γν.φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8} \right]$.

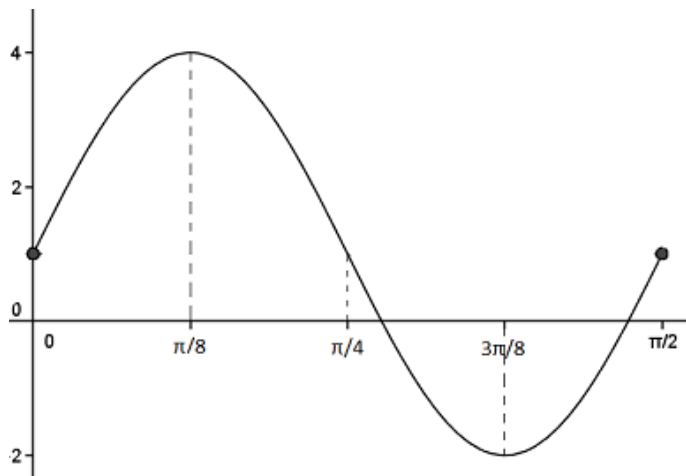
* Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το 4 για $x = \frac{\pi}{8}$ και ολικό ελάχιστο
 το -2 για $x = \frac{3\pi}{8}$.

* Η f δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

* Η f είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

* Για τη γραφική παράσταση της f είναι $\beta = \frac{T}{4} = \frac{\frac{\pi}{2}}{4} = \frac{\pi}{8}$ οπότε:

x	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
4x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\eta\mu 4x$	0	1	0	-1	0
$3\eta\mu 4x$	0	3	0	-3	0
$3\eta\mu 4x+1$	1	4	1	-2	1



$$\textbf{Г.i. } \sigma\varphi x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \sigma\varphi x = -\sigma\varphi \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \sigma\varphi x = \sigma\varphi \left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

ii. $\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{7}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{7}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

$$2x + \frac{\pi}{7} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \text{ή} \quad 2x + \frac{\pi}{7} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{42} \Leftrightarrow \quad \text{ή} \quad 2x = 2\kappa\pi + \frac{29\pi}{42} \Leftrightarrow$$

$$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{84}, \kappa \in \mathbb{Z} \quad \text{ή} \quad x = \kappa\pi + \frac{29\pi}{84}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

iii. $2\sigma\upsilon\nu^2x-9\sigma\upsilon\nu x+4=0 \overset{\text{Θέτουμε}}{\underset{\sigma\upsilon\nu x=\omega}{\Leftrightarrow}} 2\omega^2-9\omega+4=0$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 81 - 32 = 49 > 0$.

Άρα έχει δύο άνισες λύσεις τις $\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{9 \pm 7}{4}$, άρα

$$\omega_1 = 4 \text{ ή } \omega_2 = \frac{1}{2}. \text{ Τότε:}$$

Η $\sigma_{\text{υν}\chi=4}$ είναι αδύνατη. Οπότε έχουμε:

$$\sigma_{UVX} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma_{UVX} = \sigma_{UV} \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$