ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

112

Ύλη :Εξισώσεις-Ανισώσεις-Ακολουθίες **Α΄ Λυκείου**

Ον/μο:………………………… **16-03-25**

Θέμα 1ο :

Α. Να δοθεί ο ορισμός της γεωμετρικής προόδου. **(5 μον.)**

Β. Να δοθεί ο ορισμός της εξίσωσης δευτέρου βαθμού. **(5 μον.)**

Γ. Να αποδείξετε ότι ο νιοστός όρος αριθμητικής προόδου δίνεται απ' τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$. **(5 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Η εξίσωση $x^2 + \alpha x - 1 = 0$ έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\alpha \in R$. **Σ Λ**

ii. Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$ γράφεται $x^2 - Sx + P = 0$. **Σ Λ**

iii. Η ακολουθία $\alpha_\nu = 3\nu + 5$ είναι αριθμητική πρόοδος. **Σ Λ**

iv. Η εξίσωση $(\alpha - 1)\cdot x = \alpha(\alpha - 1)$ έχει μοναδική λύση x=α. **Σ Λ**

v. Η εξίσωση $(\lambda^2 + 1)\cdot x = \lambda + 1$ έχει μοναδική λύση ως προς x για κάθε $\lambda \in R$. **Σ Λ**

(5x2=10 μον.)

Θέμα 2ο :

Α. Να αποδείξετε ότι : $2\alpha^2 + 2\alpha + 1 > 0$. **(4 μον.)**

Β. Έστω $\alpha, \beta \in R$ με $|\alpha| \leq 2$, $|\beta| \leq 3$.

Να γράψετε την παράσταση $A = |\alpha + 3| + |\beta - 4| - 7$ χωρίς απόλυτες τιμές. **(8 μον.)**

Γ. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης :

$$A = \frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{3}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} - \frac{5}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}.$$ **(6 μον.)**

Δ. Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{2x^2 - 8x + 8}{x^2 - 3x + 2} - \frac{x + 4}{x - 2} = \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 1}$. **(7 μον.)**

Θέμα 3ο :

Δίνεται η εξίσωση $x^2-(\lambda+1)\cdot x+\lambda=0$ **(1)**

Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του λ. **(8 μον.)**

Β. Αν x_1 , x_2 ρίζες της (1) να βρείτε το λ ώστε $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=10$. **(8 μον.)**

Γ. Για λ=3 , να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες $2x_1$ και $2x_2$. **(9 μον.)**

Θέμα 4ο :

Α. Να λυθεί η εξίσωση $(x-1)^4-3(x-1)^2-4=0$. **(4 μον.)**

Β. Αν η εξίσωση $x^2-2(\beta-1)x-|\alpha|=0$ έχει διπλή ρίζα

i. Να βρείτε τα α και β . **(4 μον.)**

ii. Για α=0 και β=1 να λύσετε την ανίσωση :
$(x^2-\beta)^2-|x^2-\beta|-\alpha\beta-6\le 0$. **(5 μον.)**

Γ. Αν $-x^3+k$, x^2+3+k , -3x+k με τη σειρά που δίνονται είναι τρεις πρώτοι όροι αριθμητικής προόδου και έχουν άθροισμα 27 , τότε :

i. Να αποδείξετε ότι x=-2 **(3 μον.)**

ii. Να βρείτε τον αριθμό κ **(2 μον.)**

iii. Να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της προόδου. **(4 μον.)**

iv. Να υπολογίσετε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου . **(3 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

Θέμα 1ο:

Α. Σχ. Βιβλίο
Β. Σχ. Βιβλίο
Γ. Σχ. Βιβλίο
Δ. i. Σ **ii.** Σ **iii.** Σ **iv.** Λ **v.** Σ

Θέμα 2ο :

Α. $2\alpha^2+2\alpha+1>0 \Leftrightarrow \alpha^2+(\alpha^2+2\alpha+1)>0 \Leftrightarrow \alpha^2+(\alpha+1)^2>0$
που ισχύει.

Β. Έχουμε:

$|\alpha|\le 2 \Leftrightarrow -2\le\alpha\le 2,\;$ άρα $1\le\alpha+3\le 5$

$|\beta|\le 3 \Leftrightarrow -3\le\beta\le 3,\;$ άρα $-7\le\beta-4\le -1$

Έτσι: $A=|\alpha+3|+|\beta-4|-7=(\alpha+3)+(-\beta+4)-7=\alpha-\beta$

Γ. Είναι:

$$A=\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{3}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}-\frac{5}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}-\frac{3(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}-\frac{5(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}=$$

$$=\frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2}-\frac{3(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}-\frac{5(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=$$

$$=\frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{1}-\frac{3(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{18-12}-\frac{5(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}{10}=$$

$$=2(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2}-\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}=\frac{4\sqrt{3}+4\sqrt{2}-3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}=0.$$

Δ. Η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{2(x^2-4x+4)}{(x-1)(x-2)}-\frac{x+4}{x-2}=\frac{x-1}{(x-1)^2}\overset{x\neq 1}{\underset{x\neq 2}{\Leftrightarrow}}\frac{2(x-2)^2}{(x-1)(x-2)}-\frac{x+4}{x-2}=\frac{x-1}{(x-1)^2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{2(x-2)}{x-1}-\frac{x+4}{x-2}=\frac{1}{x-1}\Leftrightarrow 2(x-2)^2-(x+4)(x-1)=x-2\Leftrightarrow$$

$$2x^2-8x+8-x^2+x-4x+4-x+2=0\Leftrightarrow x^2-12x+14=0.$$

Η εξίσωση έχει $\Delta=(-12)^2-4.1.14=144-56=88$ και επομένως ρίζες
$x_{1,2}=\dfrac{12\pm\sqrt{88}}{2}=\dfrac{12\pm2\sqrt{22}}{2}=6\pm\sqrt{22}$, δεκτές και οι δύο.

<u>ΘΕΜΑ 3ο :</u>

Α. Η (1) έχει $\Delta=[-(\lambda+1)]^2-4\lambda=(\lambda+1)^2-4\lambda=\lambda^2+2\lambda+1-4\lambda=$

$\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2\geq0$ άρα έχει πραγματικές ρίζες.

Β. Απ' τους τύπους του Vieta
έχουμε: $x_1+x_2=-\dfrac{-(\lambda+1)}{1}=\lambda+1$ και $x_1x_2=\dfrac{\lambda}{1}=\lambda$.
Αφού $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=10\Rightarrow(\lambda+1)^2-2\lambda=10\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\lambda^2+2\lambda+1-2\lambda=10\Leftrightarrow\lambda^2=9\Leftrightarrow\lambda=\pm3$.

Γ. Για λ=3 η (1) γίνεται:
$x^2-4x+3=0\Leftrightarrow x_1=1$ ή $x_2=3$. Αρα $2x_1=2,\ 2x_2=6$.
Η νέα εξίσωση έχει τη μορφή
$x^2-Sx+P=0$ με $S=2x_1+2x_2=8$ και $P=2x_1\cdot2x_2=12$, είναι λοιπόν
η $x^2-8x+12=0$.

<u>Θέμα 4ο :</u>

Α. Θέτουμε $(x-1)^2=\omega$ και η εξίσωση γράφεται:
$\omega^2-3\omega-4=0\Leftrightarrow\omega=-1$ ή ω=4 .Δεκτή μόνο η ω=4, άρα
$(x-1)^2=4\Leftrightarrow x-1=2$ ή $x-1=-2\Leftrightarrow$ $x=3$ ή $x=-1$.

Β. i. Αφού η εξίσωση έχει διπλή ρίζα θα έχει
$\Delta=0\Rightarrow[-2(\beta-1)]^2-4\cdot1\cdot(-|\alpha|)=0\Leftrightarrow4(\beta-1)^2+4|\alpha|=0\Leftrightarrow$
$(\beta-1)^2+|\alpha|=0\Leftrightarrow(\beta-1)^2=0$ και $|\alpha|=0\Leftrightarrow$ $\beta=1$ και $\alpha=0$.

ii. Η ανίσωση γράφεται:

$(x^2-1)^2-|x^2-1|-6\leq0\Leftrightarrow|x^2-1|^2-|x^2-1|-6\leq0\overset{|x^2-1|=\omega\geq0}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow \omega^2-\omega-6\le 0 \overset{\text{ετερ.}}{\Leftrightarrow} 0\le\omega\le 3 \text{ άρα } 0\le\left|x^2-1\right|\le 3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|x^2-1\right|\le 3\Leftrightarrow -3\le x^2-1\le 3\Leftrightarrow -2\le x^2\le 4\Leftrightarrow 0\le x^2\le 4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2}\le\sqrt{4}\Leftrightarrow |x|\le 2\Leftrightarrow -2\le x\le 2.$$

Γ. i. Αφού οι αριθμοί είναι δ.ο.α.π θα ισχύει:

$$\left(x^2+3+\kappa\right)-\left(-x^3+\kappa\right)=\left(-3x+\kappa\right)-\left(x^2+3+\kappa\right)(=\omega)\Leftrightarrow$$

$$x^3+x^2+3=-3x-x^2-3\Leftrightarrow x^3+2x^2+3x+6=0 \;\Leftrightarrow$$

$$x^2\left(x+2\right)+3(x+2)=0\Leftrightarrow\left(x+2\right)(x^2+3)=0\Leftrightarrow$$

$$x+2=0\Leftrightarrow \; x=-2$$

ii. Οι τρεις όροι είναι οι: $-(-2)^3+\kappa$, $(-2)^2+3+\kappa$, $-3(-2)+\kappa$
δηλ. κ+8 , κ+7 , κ+6 . Έχουν άθροισμα 27 άρα
$\kappa+8+\kappa+7+\kappa+6=27\Leftrightarrow 3\kappa=6\Leftrightarrow \kappa=2$.

iii. Οι τρείς όροι είναι οι 10, 9, 8 οπότε ω=-1.
Είναι $\alpha_{20}=\alpha_1+19\omega=10+19\cdot(-1)\Rightarrow \alpha_{20}=-9$

iv. Είναι $S_{20}=\dfrac{20}{2}\left[2\alpha_1+19\cdot\omega\right]=10\left[2\cdot 10+19(-1)\right]=10\cdot 1$
δηλ. $S_{20}=10$