ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ον/μο:……………….. **111**

Ύλη: Οι πραγματικοί αριθμοί **Α΄ Λυκείου**

24-11-24

<u>Θέμα 1ο:</u>

Α. Τι ονομάζουμε απόλυτη τιμή ενός αριθμού α; **(5 μον.)**

Β. Τι ονομάζουμε νιοστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α; **(5 μον.)**

Γ. Για τους πραγματικούς αριθμούς α και β να αποδείξετε ότι $|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$ **(5 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Αν $\alpha\geq 0$ και $\beta\geq 0$ τότε $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$. **Σ Λ**

ii. $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$. **Σ Λ**

iii. Αν α>β και γ<0 τότε $\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\gamma$ **Σ Λ**

iv. $|\pi-3|+|4-\pi|=7$. **Σ Λ**

v. Για όλα τα $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ με α=β και γ=δ, ισχύει $\alpha+\gamma=\beta+\delta$. **Σ Λ**

(5x2=10μον.)

<u>Θέμα 2ο:</u>

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β με $\alpha\neq 0$ και $\beta\neq 0$.

Α. Να δείξετε ότι :

i. $\alpha+\dfrac{4}{\alpha}\geq 4$

ii. $\left(\alpha+\dfrac{4}{\alpha}\right)\left(\beta+\dfrac{4}{\beta}\right)\geq 16$ **(2x4=8 μον.)**

Β. Αν α είναι πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου , β πλευρά τετραγώνου, με 2<α<3 και 4<β<7, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται:

i. Η τιμή της περιμέτρου Π του τετραγώνου.

ii. Η τιμή της περιμέτρου Κ του ισοπλεύρου τριγώνου.

iii. Η τιμή του εμβαδού Ε ορθογωνίου παραλληλογράμμου με μήκη πλευρών $\dfrac{\alpha}{\beta}$ και β-α. **(3x4=12 μον.)**

Γ. Αν $4\alpha^2+9\beta^2\le 4\alpha+6\beta-2$, να δείξετε ότι $\alpha=\frac{1}{2}$ και $\beta=\frac{1}{3}$.

(5 μον.)

Θέμα 3ο:

Α. Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $1\le x\le 3$.
Να δείξετε ότι:
i. $|x-1|+|3-x|=2$
ii. $\frac{|x-4|}{x-4}+\frac{|1+x|}{x+1}=0$
iii. $\big||x-1|+|4-x|\big|=|x-4|+|7+x|-8$ **(3x3=9 μον.)**

Β. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Απόλυτη τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$\|x-1\|\le 2$	$d(x,1)\le 2$	$[-1,3]$
$\|x-3\|\le 2$		
	$d(x,-2)\le 4$	
		$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

(9 μον.)

Γ. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ και $\beta=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.
Να δείξετε ότι:
i. $\alpha^2+\beta^2=10$ **(3 μον.)**
ii. $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=2\sqrt{3}$ **(4 μον.)**

Θέμα 4ο:

Α. i. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:
$(1+2\sqrt{5})^2$ και $(1-2\sqrt{5})^2$ **(5 μον.)**
ii. Αν $A=\sqrt{21+4\sqrt{5}}-\sqrt{21-4\sqrt{5}}$, να δείξετε ότι Α=2. **(5 μον.)**
iii. Να αποδείξετε ότι $9\alpha^2-6\alpha+A>0$ για κάθε πραγματικό αριθμό α. **(5 μον.)**

Β. Δίνονται οι παραστάσεις $\mathrm{A}=\dfrac{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt[12]{3}}$ και

$\mathrm{B}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$.

i. Να δείξετε ότι Α=3 και Β=2. **(5 μον.)**

ii. Να δείξετε ότι $\sqrt{\sqrt{\dfrac{\mathrm{B}+\sqrt{\mathrm{A}}}{\mathrm{B}-\sqrt{\mathrm{A}}}}+\sqrt{\dfrac{\mathrm{B}-\sqrt{\mathrm{A}}}{\mathrm{B}+\sqrt{\mathrm{A}}}}}=2\mathrm{B}$. **(5 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(Ενδεικτικές)

Θέμα 1ο:

Α. Θεωρία

Β. Θεωρία

Γ. Θεωρία

Δ. **i.** Σ **ii.** Λ **iii.** Λ **iv.** Λ **v.** Σ

Θέμα 2ο:

Α. i. $\alpha+\frac{4}{\alpha}\geq 4\Leftrightarrow \alpha^2+4\geq 4\alpha \Leftrightarrow \alpha^2-4\alpha+4\geq 0\Leftrightarrow (\alpha-2)^2\geq 0$ που ισχύει

ii. $$\left.\begin{array}{l}\alpha+\frac{4}{\alpha}\geq 4\\ \beta+\frac{4}{\beta}\geq 4\end{array}\right\}\overset{(\cdot)}{\Rightarrow}\left(\alpha+\frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{4}{\beta}\right)\geq 16$$

Β. i. Η περίμετρος Π του τετραγώνου είναι: Π=4β οπότε:

$$4<\beta<7\overset{\cdot 4}{\Leftrightarrow}16<4\beta<28\Leftrightarrow 16<\Pi<28$$

ii. Η περίμετρος Κ του ισοπλεύρου τριγώνου είναι Κ=3α οπότε:

$$2<\alpha<3\overset{\cdot 3}{\Leftrightarrow}6<3\alpha<9\Leftrightarrow 6<K<9\ .$$

iii. Το εμβαδό Ε του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με μήκη πλευρών $\frac{\alpha}{\beta}$ και β-α είναι: $E=\frac{\alpha}{\beta}\cdot(\beta-\alpha)$ άρα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}2<\alpha<3\\ 4<\beta<7\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{c}2<\alpha<3\\ \frac{1}{4}>\frac{1}{\beta}>\frac{1}{7}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{c}2<\alpha<3\\ \frac{1}{7}<\frac{1}{\beta}<\frac{1}{4}\end{array}\right\}\overset{(\cdot)}{\Leftrightarrow}\frac{2}{7}<\frac{\alpha}{\beta}<\frac{3}{4}\ (1)\ \text{και}$$

$$\left.\begin{array}{l}2<\alpha<3\\ 4<\beta<7\end{array}\right\}\overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{c}-2>-\alpha>-3\\ 4<\beta<7\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{c}-3<-\alpha<-2\\ 4<\beta<7\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}1<\beta\text{-}\alpha<5\ (2)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\frac{2}{7}<E<\frac{15}{4}\ .$$

Γ. Είναι:

$$4\alpha^2+9\beta^2\le 4\alpha+6\beta-2 \Leftrightarrow 4\alpha^2+9\beta^2-4\alpha-6\beta+2\le 0 \Leftrightarrow$$

$$4\alpha^2-4\alpha+1+9\beta^2-6\beta+1\le 0 \Rightarrow (2\alpha-1)^2+(3\beta-1)^2\le 0$$

Που ισχύει όταν $2\alpha-1=0 \Leftrightarrow 2\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{2}$

και $3\beta-1=0 \Leftrightarrow 3\beta=1 \Leftrightarrow \beta=\frac{1}{3}$.

Θέμα 3ο:

Α. i. Εφόσον $1\le x\le 3$ είναι: $x-1\ge 0$ και $3-x\ge 0$ οπότε:

$$|x-1|+|3-x|=x-1+3-x=2$$

ii. Εφόσον $1\le x\le 3$ είναι: $x-4<0$ και $x+1>0$ οπότε:

$$\frac{|x-4|}{x-4}+\frac{|1+x|}{x+1}=\frac{-(x-4)}{x-4}+\frac{x+1}{x+1}=-1+1=0$$

iii. Εφόσον $1\le x\le 3$ είναι: $x-4<0$ και $x-1\ge 0$ και $4-x>0$ και 7+x>0 οπότε:

$$\big||x-1|+|4-x|\big|=|x-4|+|7+x|-8 \Leftrightarrow$$

$$|x-1+4-x|=4-x+7+x-8 \Leftrightarrow |3|=3 \text{ που ισχύει}$$

Β.

Απόλυτη τιμή	**Απόσταση**	**Διάστημα ή ένωση διαστημάτων**
$\lvert x-1\rvert\le 2$	$d(x,1)\le 2$	$[-1,3]$
$\lvert x-3\rvert\le 2$	$d(x,3)\le 2$	$[1,5]$
$\lvert x+2\rvert\le 4$	$d(x,-2)\le 4$	$[-6,2]$
$\lvert x\rvert\ge 2$	$d(x,0)\ge 2$	$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

Γ. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ και $\beta=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.
Να δείξετε ότι:

i. $\alpha^2+\beta^2=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=3-2\sqrt{6}+2+3+2\sqrt{6}+2=10$

ii.

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=$$

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}=2\sqrt{3}$$

<u>Θέμα 4ο:</u>

Α. i. Είναι:

$$\left(1+2\sqrt{5}\right)^2=1+4\sqrt{5}+\left(2\sqrt{5}\right)^2=1+4\sqrt{5}+20=21+4\sqrt{5} \quad \text{και}$$

$$\left(1-2\sqrt{5}\right)^2=1-4\sqrt{5}+\left(2\sqrt{5}\right)^2=1-4\sqrt{5}+20=21-4\sqrt{5}$$

ii. Έχουμε:

$$A=\sqrt{21+4\sqrt{5}}-\sqrt{21-4\sqrt{5}}=\sqrt{\left(1+2\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt{\left(1-2\sqrt{5}\right)^2}=$$

$$\left|1+2\sqrt{5}\right|-\left|1-2\sqrt{5}\right|=1+2\sqrt{5}-\left(-1+2\sqrt{5}\right)=1+2\sqrt{5}+1-2\sqrt{5}=2$$

iii. Είναι: $9\alpha^2-6\alpha+2>0 \Leftrightarrow 9\alpha^2-6\alpha+1+1>0 \Leftrightarrow \left(3\alpha-1\right)^2+1>0$

που ισχύει

Β. i. $A=\dfrac{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt[12]{3}}=\dfrac{\sqrt[12]{3^3}\cdot\sqrt[12]{3^4}\cdot\sqrt[12]{3^6}}{\sqrt[12]{3}}=\dfrac{\sqrt[12]{3^3\cdot3^4\cdot3^6}}{\sqrt[12]{3}}=\dfrac{\sqrt[12]{3^{13}}}{\sqrt[12]{3}}=\sqrt[12]{3^{12}}=3$

$$B=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\sqrt{2\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}=$$

$$\sqrt{2\left[\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2\right]}=\sqrt{2\cdot2}=2$$

ii. Έχουμε:

$$\sqrt{\sqrt{\frac{B+\sqrt{A}}{B-\sqrt{A}}}+\sqrt{\frac{B-\sqrt{A}}{B+\sqrt{A}}}}=\sqrt{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}}=$$

$$\sqrt{\sqrt{\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}}+\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}}}=$$

$$\sqrt{\sqrt{\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{4-3}}+\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{4-3}}}=\sqrt{\frac{\left|2+\sqrt{3}\right|}{1}+\frac{\left|2-\sqrt{3}\right|}{1}}=$$

$$\sqrt{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}=\sqrt{4}=2$$