ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **121**

Β' Λυκείου

Ον/μο:………………………. **Γεν. Παιδείας**

Ύλη: Συστήματα- Ιδιότητες συναρτήσεων - Τριγωνομετρία **06-10-24**

Θέμα 1^{o}:

A.i. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A λέγεται γνησίως φθίνουσα στο A; **(7 μον.)**

ii. Να αποδείξετε ότι: $ημ^2ω+συν^2ω=1$. **(8 μον.)**

iii. Τι ονομάζουμε γραμμική εξίσωση; **(5 μον.)**

B. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** **Σωστό** ή **(Λ)** **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Το σύστημα $\begin{cases} 2x-2y=4 \\ x+y=2 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις. **Σ Λ**

ii. Η συνάρτηση $f(x)=3x^2,\ x\in[-2,2)$ είναι άρτια . **Σ Λ**

iii. Η συνάρτηση $f(x)=3x^2-5x+6$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. **Σ Λ**

iv. Ισχύει ότι : $συν\left(30π+\dfrac{π}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$. **Σ Λ**

v. Η συνάρτηση $φ(x-3)+2$ είναι μετατόπιση της φ κατά 3 μονάδες δεξιά και 2 μονάδες πάνω . **Σ Λ**

(5x1=5 μον.)

Θέμα 2^{o}:

A. Ο Κώστας καταθέτει σε μία τράπεζα 15 χαρτονομίσματα των 20€ και 50€. Συμβολίζουμε με x και y το πλήθος των χαρτονομισμάτων των 20€ και 50€ αντίστοιχα.

i. Δίνονται οι εξισώσεις: 1. y=15-x 2. y-x=15
Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει τη σχέση των x και y. **(4 μον.)**

ii. Η συνολική αξία των χρημάτων είναι 480€. Δίνονται ακόμα οι εξισώσεις: 3. 50y-20x=480 4. 20x+50y=480
Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει τη συνολική αξία των χρημάτων σε σχέση με τα x και y. **(4 μον.)**

iii. Να βρείτε πόσα χαρτονομίσματα των 20€ και 50€ κατέθεσε ο Κώστας. **(5 μον.)**

Β. Να λύσετε το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-2y}{2}-\dfrac{3y-1}{4}=-x+5\\ 1-2x(y-1)=3x-y(2x-1)\end{array}\right\}$$ **(12 μον.)**

<u>Θέμα 3ο:</u>

Α. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
ii. Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία.
iii. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης.
iv. Να εξετασθεί η συνάρτηση ως προς τις συμμετρίες. **(4x4=16 μον.)**

Β. Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x)=3x^2, x\in\mathbb{R}$ και $f(x)=3x^2-6x+8,\ x\in\mathbb{R}$.

i. Να ελέγξετε αν η συνάρτηση $\varphi(x)$ είναι άρτια ή περιττή και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.
ii. Να αποδείξετε ότι $f(x)=3(x-1)^2+5,\ x\in\mathbb{R}$. Στη συνέχεια με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ, να παραστήσετε γραφικά την f αιτιολογώντας την απάντησή σας.
iii. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τον άξονα συμμετρίας της f. **(3x3=9 μον.)**

<u>Θέμα 4ο:</u>

Α. Αν $\eta\mu x=\dfrac{12}{13},\ x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x. **(6 μον.)**

Β. Να αποδείξετε ότι : $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\varepsilon\varphi x}+\dfrac{\eta\mu x}{1-\sigma\varphi x}=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$. **(7 μον.)**

Γ. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\varepsilon\varphi 225^\circ$ και $\eta\mu 330^\circ$. **(6 μον.)**

Δ. Να αποδείξετε ότι :

$$\frac{\varepsilon\varphi(\pi+x)\cdot\sigma\upsilon\nu(-x)\cdot\eta\mu(9\pi+x)}{\sigma\varphi\left(\dfrac{17\pi}{2}-x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi-x)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{13\pi}{2}+x\right)}=1.$$ **(6 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1^{o}:

Α. i.Σχ. Βιβλίο **ii.** Σχ. Βιβλίο **iii.** Σχ. Βιβλίο

Δ. i.Λ **ii.**Λ **iii.** Σ **iv.**Σ **v.**Σ

Θέμα 2^{o}:

Α. i. Όλα τα χαρτονομίσματα είναι 15, οπότε το άθροισμα των x και y είναι 15, οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι x+y=15.

ii. Τα x χαρτονομίσματα των 20€ έχουν αξία 20x . Αντίστοιχα τα y χαρτονομίσματα των 50€ έχουν αξία 50y. Η συνολική αξία είναι 480€, οπόλτε η ζητούμενη εξίσωση είναι 20x+50y=480.

iii.

$$\left.\begin{matrix} x+y=15 \\ 20x+50y=480 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y=15-x \\ 20x+50y=480 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y=15-x \\ 20x+50(15-x)=480 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} y=15-x \\ 20x+750-50x=480 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y=15-x \\ -30x=-270 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y=6 \\ x=9 \end{pmatrix}$$

Επομένως ο Κώστας έχει 9 χαρτονομίσματα των 20€ και 6 χαρτονομίσματα των 50€.

Β. $$\left.\begin{matrix} \frac{x-2y}{2}-\frac{3y-1}{4}=-x+5 \\ 1-2x(y-1)=3x-y(2x-1) \end{matrix}\right\} \overset{\cdot 4}{\Leftrightarrow} \left.\begin{matrix} 2(x-2y)-(3y-1)=-4x+20 \\ 1-2xy+2x=3x-2yx+y \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} 2x-4y-3y+1=-4x+20 \\ -2xy+2x-3x+2xy-y=-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 2x-4y-3y+4x=20-1 \\ -x-y=-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} 6x-7y=19 \\ -x-y=-1 \end{matrix}\right\} \underset{\cdot 6}{\Leftrightarrow} \left.\begin{matrix} 6x-7y=19 \\ -6x-6y=-6 \end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{matrix} -13y=13 \\ -x-y=-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y=-1 \\ -x+1=-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} y=-1 \\ x=2 \end{pmatrix}$$

Θέμα 3ο:

Α. Δίνεται η $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

i. Για να ορίζεται η f πρέπει:

$\underbrace{1-x^2\geq 0}_{x=1 \text{ ή } x=-1} \overset{\text{ετερ.του α}}{\Leftrightarrow} -1\leq x\leq 1$. Οπότε: $A=[-1,1]$.

ii. → Έστω $x_1,x_2\in[-1,0]$ με $x_1<x_2$. Τότε:

$\mathbf{x_1<x_2} \Leftrightarrow x_1^2>x_2^2 \Leftrightarrow -x_1^2<-x_2^2 \Leftrightarrow 1-x_1^2<1-x_2^2 \Leftrightarrow$

$\sqrt{1-x_1^2}<\sqrt{1-x_2^2} \Leftrightarrow \mathbf{f(x_1)<f(x_2)}$.

Δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα σ' αυτό το διάστημα.

→ Έστω $x_1,x_2\in[0,1]$ με $x_1<x_2$. Τότε:

$\mathbf{x_1<x_2} \Leftrightarrow x_1^2<x_2^2 \Leftrightarrow -x_1^2>-x_2^2 \Leftrightarrow 1-x_1^2>1-x_2^2 \Leftrightarrow$

$\sqrt{1-x_1^2}>\sqrt{1-x_2^2} \Leftrightarrow \mathbf{f(x_1)>f(x_2)}$.

Δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα σ' αυτό το διάστημα.

iii. Είναι: $x^2\geq 0 \Leftrightarrow -x^2\leq 0 \Leftrightarrow 1-x^2\leq 1 \Leftrightarrow f(x)\leq 1$.

Επομένως, η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το 1 για x=0.

Επίσης, η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=\pm 1$ το y=0.

iv. Το πεδίο ορισμού της f είναι $A=[-1,1]$. Οπότε

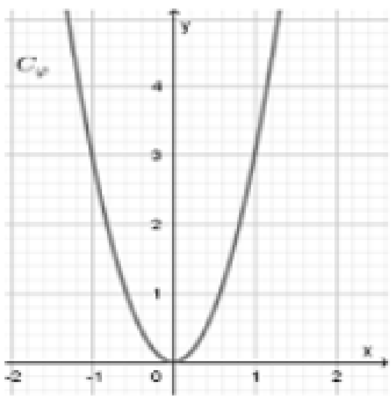
$\forall x\in A$ το $-x\in A$. Επίσης,

$\mathbf{f(-x)}=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2}=\mathbf{f(x)}$. Άρα η f είναι άρτια.

Β.i. Η συνάρτηση φ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $-x\in\mathbb{R}$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$\varphi(-x)=3(-x)^2=3x^2=\varphi(x)$, οπότε είναι άρτια συνάρτηση.

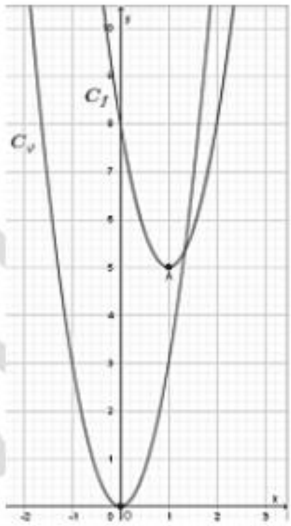
Η γραφική της παράσταση είναι η παραβολή:



ii. Είναι: $f(x)=3x^2-6x+8=3(x^2-2x)+8=3(x^2-2x+1-1)+8=$

$3(x-1)^2-3+8=3(x-1)^2+5$.

Επομένως η γραφική παράσταση της f προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της φ, μία οριζόντια κατά 1 μονάδα δεξιά και μία κατακόρυφη κατά 5 μονάδες πάνω. Οπότε η γραφική της παράσταση είναι:



iii. Η κορυφή της παραβολής είναι το σημείο Α(1,5) .

Οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Ο άξονας συμμετρίας της είναι η κατακόρυφη ευθεία που περνάει από την κορυφή της Α και είναι η x=1.

<u>Θέμα 4^{ο}:</u>

Α. Είναι:

$$ημ^2x+συν^2x=1 \Leftrightarrow \left(\frac{12}{13}\right)^2+συν^2x=1 \Leftrightarrow συν^2x=1-\frac{144}{169} \Leftrightarrow$$

$$συν^2x=\frac{169}{169}-\frac{144}{169} \Leftrightarrow συν^2x=\frac{25}{169} \Leftrightarrow συνx=\pm\frac{5}{13} \overset{x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)}{\Leftrightarrow} συνx=-\frac{5}{13}$$

Επίσης: $εφx=\dfrac{ημx}{συνx}=\dfrac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}}=-\dfrac{12\cdot 13}{5\cdot 13} \Leftrightarrow εφx=-\dfrac{12}{5}$ και $σφx=-\dfrac{5}{12}$.

Β.

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\varepsilon\varphi x}+\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\varphi x}=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}+\frac{\eta\mu x}{1-\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}=$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x}-\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}+\frac{\eta\mu x}{\dfrac{\eta\mu x}{\eta\mu x}-\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}+\frac{\eta\mu x}{\dfrac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}=$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}+\frac{\eta\mu^2 x}{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}-\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}=$$

$$\frac{(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}=\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x$$

Γ. Είναι: $\varepsilon\varphi 225^\circ=\varepsilon\varphi(180^\circ+45^\circ)=\varepsilon\varphi 45^\circ=1$

$$\eta\mu 330^\circ=\eta\mu(360^\circ-30^\circ)=-\eta\mu 30^\circ=-\frac{1}{2}$$

Δ. Έχουμε:

$$\frac{\varepsilon\varphi(\pi+x)\cdot\sigma\upsilon\nu(-x)\cdot\eta\mu(9\pi+x)}{\sigma\varphi\left(\dfrac{17\pi}{2}-x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi-x)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{13\pi}{2}+x\right)}=$$

$$\frac{\varepsilon\varphi x\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot(-\eta\mu x)}{\varepsilon\varphi x\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot(-\eta\mu x)}=1$$