ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

225

ΥΛΗ:Ολη η ύλη **Γ΄Λυκείου**
Ον/μο:…………… **Θετ-Τεχν. Κατ**
23-5-2024

<u>ΘΕΜΑ Α:</u>

Α1.α. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Fermat. **(μον.2)**
β. Να αποδείξετε το Θεώρημα Fermat. **(μον.5)**

Α2. Θεωρήστε τον ισχυρισμό:
« Αν μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, είναι κυρτή, τότε θα ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.»
α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στην κόλλα σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. **(μον.1)**
β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. **(μον.3)**

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών. **(μον.4)**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}, x\neq 0$ είναι σταθερή. Σ Λ

β. Αν $(1-x)(1+5x)\le f(x)\le (3x+1)^2$, τότε η f είναι συνεχής στο 0. Σ Λ

γ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, τότε ορίζεται πάντα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$. Σ Λ

δ. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x)<0, x\in\mathbb{R}$ τότε η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$. Σ Λ

ε. Μία πολυωνυμική συνάρτηση $3^{ου}$ βαθμού έχει οπωσδήποτε σημείο καμπής. Σ Λ

(μον.10)

ΘΕΜΑ Β:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$.

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **(μον.7)**

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. **(μον.5)**

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. **(μον.6)**

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. **(μον.7)**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να λύσετε το σύστημα $\begin{matrix} x+e^{x-1}=y+e^{y-1} \\ x^2+xy+y^2=12 \end{matrix}$ **(μον.5)**

Γ2. Έστω οι πραγματικοί αριθμοί α , β και η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^4-\alpha x+\beta$ η οποία έχει ελάχιστο το f(2).

α) Να δείξετε ότι α=32 **(μον.5)**

β) Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Α(1,f(1)) διέρχεται από την αρχή των αξόνων τότε :

1. Να αποδειχθεί ότι β =3 **(μον.5)**

2. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=-48$ δεν έχει πραγματική λύση. **(μον.5)**

3. Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με g(1)=1 , για την οποία ισχύει $f'(x)\cdot g(x)+(f(x)+48)\cdot g'(x)=0 \quad x\in\mathbb{R}$. **(μον.5)**

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

Δ1α. Να αποδείξετε ότι $m(\beta-\alpha) \le \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \le M(\beta-\alpha)$ με m και M η ελάχιστη και μέγιστη τιμή της. **(μον.2)**

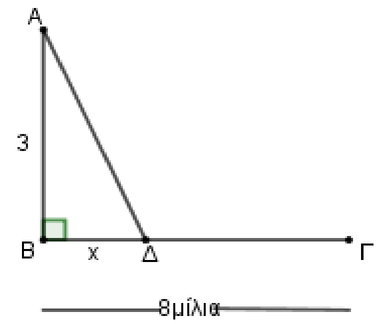
Δ1β. Να αποδείξετε ότι η $f(x)=\dfrac{1}{3+x^2}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$. **(μον.2)**

Δ1γ. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{x}^{x+1}\dfrac{1}{3+t^2}dt$ **(μον.5)**

Δ2. Αν $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{\nu}x\cdot \sigma\upsilon\nu x dx=\dfrac{1}{8}$, υπολογίστε τον φυσικό ν. **(μον.4)**

Δ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}\,dx$ **(μον.5)**

Δ4. Ένας ψαράς βρίσκεται με τη βάρκα του στη θέση Α και το πλησιέστερο σημείο Β της ακτής απέχει 3 ναυτικά μίλια. Στη θέση Γ και σε απόσταση 8 ναυτικών μιλίων(ν.μ.) από το Β, βρίσκεται η ιχθυόσκαλα όπου θέλει να φτάσει για να πουλήσει τα ψάρια του. Αν η βάρκα κινείται με ταχύτητα 4 ν.μ./h και ο ψαράς πεζός κινείται με ταχύτητα 5 ν.μ./h, να βρεθεί η τιμή του x για την οποία ο ψαράς χρειάζεται τον λιγότερο χρόνο για να φτάσει στην ιχθυόσκαλα.



Πόση είναι η συνολική διαδρομή τότε; **(μον.7)**

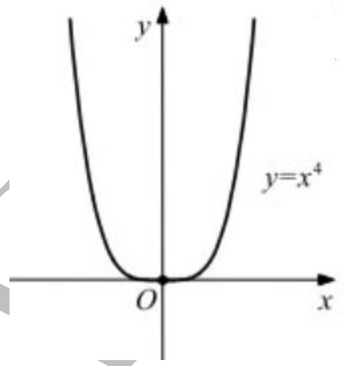
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α:

Α1.α. Σχ. βιβλίο σελ. 142
β. Σχ. βιβλίο σελ. 142

Α2.α. Ψ



β. Έχουμε την $f(x)=x^4, x\in\mathbb{R}$. Επειδή η $f'(x)=4x^3, x\in\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η $f(x)=x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Εντούτοις, η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο $\mathbb{R}$, αφού $f''(0)=0$.

Α3. Σχ. βιβλίο σελ. 76

Α4. α. Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β:

Β1. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$ ορίζεται στο $A=\mathbb{R}-\{1\}$ και είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σ' αυτό ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Η παράγωγος της f είναι:

$$f'(x)=\left(\frac{e^x}{x-1}\right)'=\frac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2}=\frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}, x\neq 1.$$

Για το πρόσημο και τις ρίζες της f' έχουμε:

$$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}\geq 0 \underset{(x-1)^2>0}{\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}} x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2 .$$

Ο πίνακας προσήμων της f' είναι:

x	$-\infty$ 1	2	$+\infty$
f'	$-$ ‖	$-$ ○	$+$
f	↘ ‖	↘	↗

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty,1)$ και $(1,2]$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$. Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=2$ το $f(2)=e^2$.

Β2. Η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων με:

$$f''(x)=\left(\frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}\right)'=\frac{\left[e^x(x-2)+e^x\right](x-1)^2-2e^x(x-2)(x-1)}{(x-1)^4}=$$

$$\frac{e^x(x-1)^3-2e^x(x-2)(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{e^x(x-1)\left[(x-1)^2-2(x-2)\right]}{(x-1)^4}=$$

$$\frac{e^x\left(x^2-2x+1-2x+4\right)}{(x-1)^3}=\frac{e^x\left(x^2-4x+5\right)}{(x-1)^3},x\neq 1.$$

Για τις ρίζες και το πρόσημο της f'' έχουμε:

$$f''(x)\geq 0\Leftrightarrow\frac{e^x\left(x^2-4x+5\right)}{(x-1)^3}\geq 0\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}\frac{\left(x^2-4x+5\right)}{(x-1)^3}\geq 0 \quad \textbf{(1)}$$

Το τριώνυμο x^2-4x+5 έχει Δ=–4<0 και α=1>0 άρα $x^2-4x+5>0$. Τότε από τη σχέση **(1)** έχουμε: $f''(x)>0\Leftrightarrow(x-1)^3>0\Leftrightarrow x>1$. Ο πίνακας προσήμων της f'' είναι:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	$-$	‖	$+$
f	$\cap$	‖	$\cup$

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty,1)$ και κυρτή στο $(1,+\infty)$ και δεν παρουσιάζει σημείο καμπής.

B3. Για τις ασύμπτωτες της f έχουμε:

*<u>Κατακόρυφες</u>:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{e^x}{x-1} = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{e^x}{x-1} = +\infty$$

Δηλαδή η **x=1** είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

*<u>Οριζόντιες και πλάγιες</u>:

Στο $+\infty$:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2-x} \underset{L-H}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} \underset{L-H}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

Δηλαδή δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Στο $-\infty$:

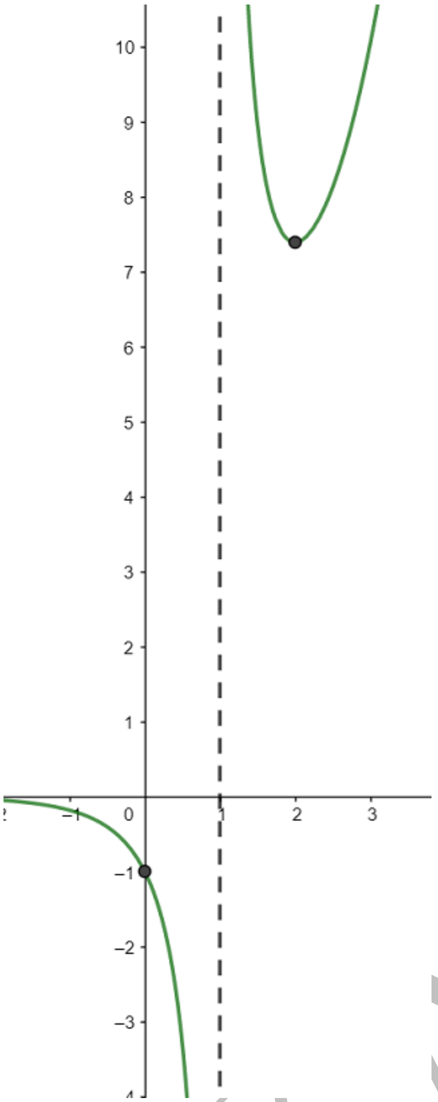
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x-1} \cdot e^x \right) = 0\cdot 0 = 0$$

, δηλαδή η y=0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

B4. Για τη χάραξη της γραφικής παράστασης της f συνοψίζουμε τα συμπεράσματα από τα παραπάνω ερωτήματα. Επίσης,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x-1} \underset{L-H}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

. Για τα σημεία τομής με τους άξονες έχουμε ότι η C_f δεν τέμνει τον $x'x$ εφόσον $f(x) \neq 0$, ενώ τέμνει τον $y'y$ στο $(0, f(0))$ δηλαδή στο $(0,-1)$. Οπότε:



<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1.Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x) = x + e^{x-1}$.Η πρώτη εξίσωση γράφεται $f(x) = f(y)$ **(1).** Η f είναι γνησίως αύξουσα γιατί έχει παράγωγο $f'(x) = 1 + e^{x-1} > 0$ άρα και 1-1.Η (1) λοιπόν δίνει $x = y$.

Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος γίνεται:

$x^2 + x^2 + x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2$ ή x=2.

Οι λύσεις του συστήματος είναι: $(x, y) = (-2, -2)$ ή $(x, y) = (2, 2)$.

Γ2.α)Αφού η f έχει ελάχιστο το f(2), σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat θα είναι $f'(2) = 0$.Είναι $f'(x) = 4x^3 - \alpha$ άρα $4 \cdot 2^3 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 32$.

β)1. Είναι $f(x)=x^4-32x+\beta$ **.**

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1)$ δηλ. $y+31-\beta=-28(x-1)$ και επειδή διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα ισχύει:

$0+31-\beta=-28(0-1)\Leftrightarrow \beta=3$.

2. Είναι $f(x)\geq f(2)\Rightarrow f(x)\geq -45>-48$ άρα η εξίσωση $f(x)=-48$ είναι αδύνατη.

3. Είναι $f'(x)\cdot g(x)+(f(x)+48)\cdot g'(x)=0$ άρα

$(f(x)+48)'\cdot g(x)+(f(x)+48)\cdot g'(x)=0\Leftrightarrow$

$[(f(x)+48)\cdot g(x)]'=0\Leftrightarrow (f(x)+48)\cdot g(x)=c$ **(1).**

Είναι $g(1)=1\overset{(1)}{\Rightarrow}(f(1)+48)\cdot g(1)=c\Leftrightarrow c=20$ και από την (1)

εχουμε $g(x)=\dfrac{20}{f(x)+48}\Rightarrow g(x)=\dfrac{20}{x^4-32x+51}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αφού η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, σύμφωνα με το Θεώρημα Μ.Ε.Τ έχει ελάχιστη (m) και μέγιστη (M) τιμή δηλ. υπάρχουν x_ε και x_μ στο $[\alpha,\beta]$ ώστε $f(x_\varepsilon)=m$ και $f(x_\mu)=M$.

Έχουμε : $m\leq f(x)\leq M\Rightarrow \int_\alpha^\beta m\,dx\leq \int_\alpha^\beta f(x)\,dx\leq \int_\alpha^\beta M\,dx\Rightarrow$

$m(\beta-\alpha)\leq \int_\alpha^\beta f(x)dx\leq M(\beta-\alpha)$.

Δ2. Η $f(t)=\dfrac{1}{3+t^2}$ έχει $A_f=R$ και

$f'(t)=-\dfrac{(3+t^2)'}{(3+t^2)^2}=-\dfrac{2t}{(3+t^2)^2}<0 \quad \forall t>0$ οπότε είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Έχουμε: $x \le t \le x+1 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow}$

$$f(x) \ge f(t) \ge f(x+1) \Rightarrow \int_x^{x+1} f(x)dt \ge \int_x^{x+1} f(t)dt \ge \int_x^{x+1} f(x+1)dt \Rightarrow$$

$$f(x+1)(x+1-1) \le \int_x^{x+1} f(t)dt \le f(x)\cdot(x+1-x) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3+\left(x+1\right)^2} \le \int_x^{x+1} \frac{1}{3+t^2}dt \le \frac{1}{3+x^2} .$$

Όμως : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{3+(x+1)^2} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{3+x^2} = 0$ και από το

κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_x^{x+1} \frac{1}{3+t^2}dt = 0$.

Δ3. Έχουμε : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{\nu}x \cdot \sigma\upsilon\nu x dx = \frac{1}{8}$ άρα $\left[\dfrac{\eta\mu^{\nu+1}x}{\nu+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{8}$ δηλ .

$$\frac{\eta\mu^{\nu+1}\frac{\pi}{2}}{\nu+1} - \frac{\eta\mu^{\nu+1}0}{\nu+1} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{\nu+1} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \nu+1 = 8 \Leftrightarrow \nu=7 .$$

Δ4. Είναι: $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}\,dx =$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x - 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}\,dx =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2} \cdot dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left|\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x\right| dx \quad \textbf{(1).}$$

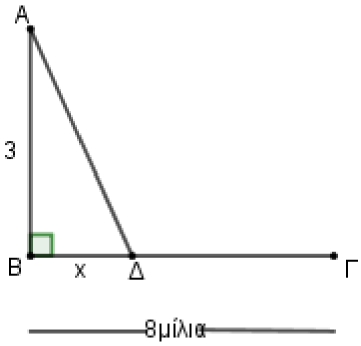
Στο διάστημα $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$, όπως εύκολα διαπιστώνουμε από τον τριγωνομετρικό κύκλο , είναι $\sigma\upsilon\nu x \ge \eta\mu x$ άρα $\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x \le 0$ και η (1) γράφεται :

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)dx=\left[\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\left(\eta\mu\frac{\pi}{4}+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\right)-\left(\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\ \text{δηλ.}\ \ I=\sqrt{2}\,.$$

Δ4. Έστω ΑΔ η διαδρομή της βάρκας και ΔΓ η διαδρομή που θα κινηθεί ο ψαράς πεζός. Είναι $A\Delta=\sqrt{9+x^2}$ και ο αντίστοιχος χρόνος $\dfrac{\sqrt{9+x^2}}{4}$ και $(\Delta\Gamma)=8-x$ με αντίστοιχο χρόνο $\dfrac{8-x}{5}$.



Ο συνολικός χρόνος είναι :

$$t(x)=\frac{8-x}{5}+\frac{\sqrt{9+x^2}}{4},x\in[0,8].$$

Είναι :

$$t'(x)=\frac{1}{5}(8-x)'+\frac{1}{4}\left(\sqrt{9+x^2}\right)'=-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{9+x^2}}=\frac{-4\sqrt{9+x^2}+5x}{20\sqrt{9+x^2}}.$$

Αν $f'(x)\ge 0\Leftrightarrow -4\sqrt{9+x^2}+5x\ge 0\Leftrightarrow 4\sqrt{9+x^2}\le 5x$ άρα

$16\cdot\left(9+x^2\right)\le 25x^2\Leftrightarrow x^2\ge 16$ άρα $x\ge 4$.

Ο πίνακας προσήμου για την t΄ είναι:

x	0	4	8
t΄	−	0	+
t	↘	ελ	↗

Η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στο x=4.
Η συνολική διαδρομή, ώστε να φτάσει ο ψαράς στην ιχθυόσκαλα συντομότερα είναι $(A\Delta)+(\Delta\Gamma)=\sqrt{9+16}+(8-4)=9$ν.μ.