ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 224

Γ' Λυκείου

Ον/μο:………………………… **Μαθ. Προσαν.**

Ύλη: Όλη **20-04-24**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha \in R-Z$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$. **(7μον.)**

Α2. Τι ονομαζουμε ορισμένο ολοκλήρωμα από το α στο β μιας συνεχούς συνάρτησης στο [α, β]. **(6μον.)**

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Fermat. **(3μον.)**

Α4. Θεωρήστε τον ισχυρισμό: « Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α,β) και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, τότε $f(\alpha)\neq f(\beta)$.»

Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(3μον.)**

Α5. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

α. Αν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη σ' αυτό. **Σ Λ**

β. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, και $f(\beta)$ είναι η μέγιστη τιμή της f, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f'(\beta)=0$. **Σ Λ**

γ. Αν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$, τότε η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο διάστημα (α,β). **Σ Λ**

(6μον.)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x)=\ln x$ και $h(x)=\dfrac{2-x}{x-1}$.

Β1. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f=g\circ h$. **(6μον.)**

Έστω $f(x)=\ln\left(\dfrac{2-x}{x-1}\right),\ x\in(1,2)$.

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της. **(6μον.)**

Β3. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να αποδείξετε ότι
$f^{-1}(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x+1},\ x\in R$.
Κατόπιν να βρείτε τις ασύμπτωτες της $C_{f^{-1}}$. **(7μον.)**

Β4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x)=x^3,\ x\in R$ έχει μοναδική ρίζα η οποία ανήκει στο διάστημα $(1,2)$. **(6μον.)**

ΘΕΜΑ Γ

ΓΑ. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)=\lambda+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2},\ \lambda\in R$
- η f έχει ακρότατο στο $x_o=1$ το 4.

ΓΑ1. Να βρείτε τον τύπο της f. **(μον.4)**

Αν $f(x)=x+\ln x+\dfrac{2}{x}+1,\ x>0$

ΓΑ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_o>1$ ώστε $x_o^2+x_o\ln x_o+2=2024x_o$. **(μον.6)**

ΓΑ3. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\int_1^{2024} f(x)dx$ και 8092. **(μον.3)**

ΓΑ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον x'x και τις $x=1$ και $x=e$. **(μον.6)**

ΓΒ. Έστω μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β). Αν η f έχει σύνολο τιμών το $[-1,2]$ και f(α)=0 , f(β)=1 , να δείξετε ότι :

α) Υπάρχουν $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)=0$. **(μον.3)**

β) Αν η f' είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε η εξίσωση $f'(x)=(x^2+1)f(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α, β). **(μον.3)**

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$.

Δ1. Να εξετάσετε ποιες από τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle ισχύουν και ποιες όχι στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Η C_f δέχεται εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_o=0$;

Αν ναι με ποια εξίσωση. **(μον.6)**

Δ2. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (0,π). **(μον.6)**

Δ3. Να αποδείξετε ότι $\eta\mu x<\frac{2x}{\pi},\ \forall x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{2x}{\pi\cdot\eta\mu x-2x}$. **(μον.8)**

Δ4. Να δείξετε ότι σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu \Gamma>2$. **(μον.5)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

Α1, Α2, Α3, Θεωρία (Δείτε στο σχολικό βιβλίο)

Α4. Ο ισχυρισμός είναι αληθής (Α).
Εστω ότι $f(\alpha)=f(\beta)$. Για την f ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle.Αρα θα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi)=0$.
Ατοπο γιατί $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

Α5. α Σ, β Λ, γ Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.Είναι $A_g=(0,+\infty)$ και $A_h=R-\{1\}$.

Η $f=g\circ h$ ορίζεται για τα $\left.\begin{array}{l} x\in A_h \\ h(x)\in A_g\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\neq 1 \\ \dfrac{2-x}{x-1}>0\end{array}\right\}\overset{\text{ετεροσ.}}{=\!=\!=\!\Rightarrow} x\in \boxed{(1,2)=A_f}$

Ο τύπος της f είναι: $f(x)=g(h(x)=\ln\left(\dfrac{2-x}{x-1}\right)$.

Β2.Η f έχει παράγωγο $f'(x)=\left(\ln(2-x)-\ln(x-1)\right)'=\dfrac{(2-x)'}{2-x}-\dfrac{(x-1)'}{x-1}=$

$$=-\frac{1}{2-x}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1-x+2}{(x-2)(x-1)}=\frac{1}{(x-2)(x-1)}<0$$

στο (1,2). Αρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (1,2).

΄Οντας η f και συνεχής, ως πράξεις συνεχών, έχει σύνολο τιμών το

$$f(A)=\left(\lim_{x\to2^-}f(x),\lim_{x\to1+}f(x)\right)=\left(\lim_{x\to2^-}\frac{2-x}{x-1},\lim_{x\to1^+}\frac{2-x}{x-1}\right)=\boxed{(-\infty,+\infty)=R}$$

γιατί $\lim\limits_{x\to2^-}\ln\left(\dfrac{2-x}{x-1}\right)\overset{\frac{2-x}{x-1}=y}{=\!=\!=}\lim\limits_{y\to0^+}(\ln y)=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to1^+}\ln\left(\dfrac{2-x}{x-1}\right)\overset{\frac{2-x}{x-1}=y}{=\!=\!=}\lim\limits_{y\to+\infty}(\ln y)=+\infty$.

B3. Η f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της άρα είναι και 1-1. Επομένως αντιστρέφεται. Είναι: $A_{f^{-1}} = f(A) = \mathbb{R}$. Απ' την

$$f(x) = y \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2-x}{x-1}\right) = y \Leftrightarrow e^y = \frac{2-x}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)e^y = 2-x \Leftrightarrow$$

$$xe^y - e^y = 2 - x \Leftrightarrow xe^y + x = e^y + 2 \Leftrightarrow (e^y+1)x = e^y + 2 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{e^x+2}{e^x+1}. \text{ Αρα } f^{-1}(x) = \frac{e^x+2}{e^x+1}.$$

Η f είναι συνεχής στο R άρα δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.
Αναζητούμε οριζόντια ασύπμτωτη στο $-\infty$ και $+\infty$.

Είναι: ● $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x+2}{e^x+1} = \frac{0+2}{0+1} = 2$ οπότε η y=2 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

● $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+2}{e^x+1} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{LH}{=\!=\!=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(e^x+2)'}{(e^x+1)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$ οπότε η y=1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Αφού έχει οριζόντια, δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

B4. Η εξίσωση $f^{-1}(x) = x^3$ ισοδύναμα γράφεται $f^{-1}(x) - x^3 = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{e^x+2}{e^x+1} - x^3$ που είναι συνεχής

στο R άρα και στο [1,2].Εχει επίσης τιμές h(1)=$\frac{e+2}{e+1} - 1 > 0$ και

h(2)=$\frac{e^2+2}{e^2+1} - 8 < 0$.Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένας $\xi \in (1,2)$ ώστε h(ξ)=0.

Η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα, η x^3 είναι γνησίως αύξουσα άρα οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.
(ο ισχυρισμός θέλει απόδειξη)
Εχουν ήδη το σημείο με τετμημένη το $\xi \in (1,2)$.Αυτό λοιπόν είναι και μοναδικό.

Σχόλιο: Μπορουμε να δείξουμε ότι η $f^{-1}(x) - x^3$ είναι γνησίως φθίνουσα συνθετικά (με τον ορισμό) ή με παραγώγους.

ΘΕΜΑ Γ

ΓΑ1. Αφού $f'(x)=\lambda+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}$, x>0 είναι $f(x)=\lambda x+\ln x+\frac{2}{x}+c,\ c\in R$.

Αφού η f έχει στο $x_o=1$ ακρότατο το 4, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat , θα είναι $f'(1)=0$ δηλ. $\lambda+1-2=0\Rightarrow\lambda=1$ και άρα

$f(x)=x+\ln x+\frac{2}{x}+c,\ c\in R$. Επίσης f(1)=4 άρα

$1+\ln1+2+c=4\Rightarrow c=1$ $f(x)=x+\ln x+\frac{2}{x}+1,\ x>0$.

ΓΑ2. Είναι $f'(x)=1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}=\frac{x^2+x-2}{x^2}=\frac{(x-1)(x+2)}{x^2}$.

- Αν 0<x<1 είναι $f'(x)>0$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,1] αφού είναι συνεχής.

- Αν x>1 είναι $f'(x)<0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Θέλουμε να είναι $x_o^2+x_o\ln x_o+2=2024x_o\ \Leftrightarrow$

$x_o+\ln x_o+\frac{2}{x_o}=2024\Leftrightarrow x_o+\ln x_o+\frac{2}{x_o}+1=2025\Leftrightarrow f(x_o)=2025$

Η f έχει ολικό ελάχιστο το 4 και για το $A_1=(1,+\infty)$ οι τιμές της είναι $f(A_1)=(4,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))=(4,+\infty)$ στο οποίο περιέχεται το 2025.

Υπάρχει λοιπόν, και λόγω της μονοτονίας, μοναδικό $x_o>1$ ώστε $f(x_o)=2025$.

ΓΑ3. Είναι $f(x)\geq4\Rightarrow\int_1^{2024}f(x)dx\geq\int_1^{2024}4dx\Rightarrow\int_1^{2024}f(x)dx\geq4\cdot2023\Rightarrow$

$\Rightarrow\int_1^{2024}f(x)dx\geq8092$.

ΓΑ4. Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E=\int_1^e|f(x)|dx=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\left(x+\ln x+\frac{2}{x}+1\right)dx=$$

$$=\int_1^e x\,dx+\int_1^e \ln x\,dx+\int_1^e \frac{2}{x}dx+\int_1^e dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e+\int_1^e (x)'\ln x\,dx+2\left[\ln x\right]_1^e+\left[x\right]_1^e=$$

$$=\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx+2(\ln e-\ln 1)+e-1=$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}+(e\ln e-0)-e+1+2\ln e+e-1=\frac{e^2}{2}+e+\frac{1}{2}.$$

ΓΒ.α) Επειδή η f είναι συνεχής στο [α, β], σύμφωνα με το Θ.Μ.Ε.Τ. θα έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή. Επειδή $m=-1$ και M=2 αλλά f(α)=0 και f(β)=1 τα ακρότατα εμφανίζονται σε **εσωτερικά** σημεία του [α, β].

Υπάρχουν λοιπόν $x_1, x_2\in(\alpha,\beta)$ ώστε

$f(x_1)=m=-1$ και $f(x_2)=M=2$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f'(x)-(x^2+1)\cdot f(x)$.

●Η h είναι συνεχής στο [α, β] ως πράξεις συνεχών.

● $h(x_1)=f'(x_1)-(x_1^2+1)f(x_1)\overset{(\alpha)}{=\!=}0-(x_1^2+1)(-1)>0$

$h(x_2)=f'(x_2)-(x_2^2+1)f(x_2)\overset{(\alpha)}{=\!=}0-(x_2^2+1)\cdot 2<0$.

Για την h λοιπόν ισχύουν οι υποθέσεις του θ.Bolzano άρα υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της στο (α, β).

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.●Συνέχεια στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$: Η συνέχεια ελέγχεται στο $x_o=0$.

Εχει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1=f(0)$. Είναι λοιπόν συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

●Παραγωγισιμότητα στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Ελέγχεται στο $x_o=0$

Εχει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\eta\mu x}{x}-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{LH}{===}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x-x}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{LH}{===}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot 0=0\in R$.

Η f λοιπόν είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ με $f'(0)=0$.

• $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{-\frac{\pi}{2}}=\dfrac{-1}{-\frac{\pi}{2}}=\dfrac{2}{\pi}$ και $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{2}{\pi}$

άρα $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ισχύουν λοιπόν και οι τρείς υποθέσεις του θεωρήματος Rolle.Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$,δέχεται εφαπτομένη σ'αυτό με εξίσωση $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)\Rightarrow y-1=0\cdot x$ δηλ. ε: y=1 .

Δ2.Στο (0,π) η f έχει παράγωγο $f'(x)=\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)'=\dfrac{x\cdot\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}$. **(1)**

Το πρόσημο της f' καθορίζεται από το πρόσημο του αριθμητή. Για την μελέτη του θεωρούμε την w(x)=$x\cdot\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$ η οποία έχει $w'(x)=(x\cdot\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x-x\cdot\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=$
$=-x\cdot\eta\mu x<0$ στο (0, π).

Η w είναι επομένως γνησίως φθίνουσα. Αν λοιπόν $0<x<\pi\overset{w\searrow}{\Longrightarrow}$ $w(0)>w(x)>w(\pi)\Rightarrow$ $0>w(x)>-\pi$ οπότε, από την (1) προκύπτει ότι $f'(x)<0$. Η f λοιπόν είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,π).

Δ3.Για κάθε $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi\overset{f\searrow}{\Longrightarrow}f(\pi)<f(x)<f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow 0<\dfrac{\eta\mu x}{x}<\dfrac{\eta\mu\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}\Rightarrow$

$$\frac{\eta\mu x}{x} < \frac{\eta\mu\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \frac{\eta\mu x}{x} < \frac{2}{\pi} \Rightarrow \eta\mu x < \frac{2x}{\pi}.$$

Απ' την σχέση $\eta\mu x < \frac{2x}{\pi} \Leftrightarrow \pi\cdot\eta\mu x < 2x \Leftrightarrow \pi\cdot\eta\mu x - 2x < 0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(\pi\cdot\eta\mu x - 2x) = \pi\cdot\eta\mu\frac{\pi}{2} - 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi\cdot 1 - \pi = 0$ και

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(2x) = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi > 0$ είναι $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{2x}{\pi\cdot\eta\mu x - 2x} \overset{\left(\frac{\pi}{0^-}\right)}{=\!=} = -\infty$.

Δ4.Αφού το τρίγωνο είναι οξυγώνιο θα είναι

$$0 < \hat{A},\ \hat{B},\ \hat{\Gamma} < \frac{\pi}{2} \overset{f\searrow}{\Longrightarrow} \begin{cases} f(A) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ f(B) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ f(\Gamma) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\eta\mu A}{A} > \frac{2}{\pi} \\ \frac{\eta\mu B}{B} > \frac{2}{\pi} \\ \frac{\eta\mu\Gamma}{\Gamma} > \frac{2}{\pi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \eta\mu A > \frac{2A}{\pi} \\ \eta\mu B > \frac{2B}{\pi} \\ \eta\mu\Gamma > \frac{2\Gamma}{\pi} \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma > \frac{2A + 2B + 2\Gamma}{\pi} = \frac{2\pi}{\pi} = 2.$$

Αρα $\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma > 2$.