ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

222

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη:Συναρτήσεις-Ορια-Κανόνες παραγώγισης **05-11-23**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη για $x>0$, με $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Επίσης ότι δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$. **(μον.7)**

Α2. Πότε μία συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται 1-1; **(μον.5)**

Α3. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Τι ονομάζουμε πρώτη παράγωγο της f; **(μον.5)**

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής, τότε είναι και παραγωγίσιμη».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. **(μον.1)**

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α). **(μον.3)**

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για δύο συναρτήσεις f και g ισχύει ότι: $(fog)(x)=(gof)(x)$.

β) $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

γ) $\left(\ln|x|\right)'=-\dfrac{1}{x},x<0$.

δ) Για κάθε συνάρτηση f, το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα της f, εφόσον υπάρχουν, είναι το ολικό μέγιστο της f. **(μον.4)**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x)=e^{3x+2}$ και $g(x)=\ln x^2$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f και g. **(μον.3)**

β) Να βρείτε την $g \circ f$. **(μον.6)**

γ) Αν $g\left(f(x)\right) = 6x + 4,\ x \in R$, να υπολογίσετε το

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(g(f(x)) - \eta\mu^2 x - 4}{x}$. **(μον.6)**

Β2. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{1}{e^x + 1}$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. **(μον.5)**

β) Να αιτιολογήσετε γιατί αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}. **(μον.5)**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : R \to R$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2) < f(x)$. **(μον.5)**

β) Αν $\alpha^2 < \alpha$, τότε να αποδείξετε ότι

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\left[f(\alpha^2 - \alpha) - f(0)\right]\cdot x\right) = -\infty$. **(μον.7)**

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x - 1) = f(0)$. **(μον.3)**

Γ2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x-1)$ και $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$.

α) να βρείτε τα όρια **i)** $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ και **ii)** $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$. **(μον.5)**

β) Να βρείτε: **i)** το πεδίο ορισμού της $f \cdot g$

ii) το $\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$. **(μον.5)**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.Εστω συνάρτηση f με f(0)=0 και $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 2$.

α)Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 2$. **(μον.4)**

β)Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. **(μον.4)**

γ)Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x}$. **(μον.8)**

Δ2. Να βρείτε την παράγωγο κάθε μιας συνάρτησης:

α) $f(x) = \frac{1}{4} \cdot \sigma\upsilon\nu^3(3x - 2)$

β) $g(x) = \ln\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$

γ) $f(t) = 2^t - x^2 + \sigma\varphi t$ **(μον.9)**

Σημείωση: Τα θέματα είναι από την τράπεζα θεμάτων

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

Α1, Α2, Α3 Θεωρία

Α4. α) Ψ

β) Η $f(x)=|x|$ είναι συνεχής στο στο R αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη

στο $x_o=0$ γιατί $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1\end{cases}$

Α5. α Λάθος , **β** Λάθος, **γ** Λάθος, **δ** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. α)Η f έχει πεδίο ορισμού το $A_f=R$.

Η g ορίζεται για τα x για τα οποία είναι $x^2>0\Leftrightarrow x\neq 0$.

Αρα $A_g=R^*$.

β)Η $g\circ f$ ορίζεται για τα $\left.\begin{matrix}x\in A_f\\ f(x)\in A_g\end{matrix}\right|\Rightarrow\left.\begin{matrix}x\in R\\ e^{3x+2}\neq 0\end{matrix}\right|\Rightarrow x\in R$.

Αρα $A_{g\circ f}=R$.

γ)Είναι: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(g\circ f)(x)-\eta\mu^2x-4}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x+4-\eta\mu^2x-4}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(6-x\cdot\dfrac{\eta\mu^2x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(6-x\cdot\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right)=6-0\cdot 1^2=\mathbf{6}$

Β2.α)Η f έχει παράγωγο στο $A_f=R$ την

$f'(x)=\left(\dfrac{1}{e^x+1}\right)'=-\dfrac{(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}=-\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}<0$, άρα είναι

γνησίως φθίνουσα.

Για το σύνολο τιμών και απ' την εξίσωση $f(x)=y \Leftrightarrow \dfrac{1}{e^x+1}=y \overset{y>0}{\Leftrightarrow}$

$e^x+1=\dfrac{1}{y} \Leftrightarrow e^x=\dfrac{1}{y}-1$ **(1)**.

Πρέπει $\dfrac{1}{y}-1>0 \Leftrightarrow \dfrac{1-y}{y}>0 \Leftrightarrow y\cdot(1-y)>0 \overset{\text{ετεροσ.}}{\Longleftrightarrow} 0<y<1$.

Η (1) γίνεται $\ln e^x=\ln\left(\dfrac{1}{y}-1\right) \Leftrightarrow x=\ln\dfrac{1-y}{y}$. **(2)**

Αρα $f(A)=(0,1)$.

β) Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι και 1-1 επομένως αντιστρέφεται. Απ' την (2) προκύπτει ότι

$f^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{1-x}{x}\right)$, με $A_{f^{-1}}=(0,1)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. α) Εχουμε: $f(x^2)<f(x) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x^2<x \Leftrightarrow x^2-x<0 \overset{\text{ετεροσ.}}{\Longleftrightarrow} 0<x<1$.

β) Εχουμε:

$\alpha^2<\alpha \Leftrightarrow \alpha^2-\alpha<0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(\alpha^2-\alpha)<f(0) \Leftrightarrow f(\alpha^2-\alpha)-f(0)<0$.

Είναι τώρα:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(f(\alpha^2-\alpha)-f(0)\right)\cdot x\right]=\left(f(\alpha^2-\alpha)-f(0)\right)\cdot(+\infty)=-\infty$.

γ) Εχουμε: $f(e^x-1)=f(0) \underset{\alpha\rho\alpha\ 1-1}{\overset{f\nearrow}{\Longleftrightarrow}} e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$.

Γ2. Για την f πρέπει: $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$ άρα $A_f=(1,+\infty)$.

Για την g πρέπει: $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$ άρα $A_g=R-\{1\}$.

α) i) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\ln(x-1) \overset{x-1=y}{=\!=\!=} \lim\limits_{y\to0^+}(\ln y)=-\infty$

ii) $\lim\limits_{x\to1} g(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}=\begin{cases}-\infty, & \text{αν } x\to1^-\\ +\infty, & \text{αν } x\to1^+\end{cases}$ άρα δεν υπάρχει το όριο.

β) i) Είναι: $A_{f\cdot g} = A_f \cap A_g = (1,+\infty)$.

ii) Είναι: $\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim\limits_{x\to 1^+}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim\limits_{x\to 1^+}\left[\ln(x-1)\cdot\dfrac{1}{x-1}\right] =$

$= (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.α) Είναι: $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-0}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 2$

δηλ. $f'(0) = 2$.

β) Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν είναι και συνεχής σ' αυτό άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$.

γ) Είναι: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{x}{\eta\mu x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{\eta\mu x}{x}}\right) = 2\cdot\dfrac{1}{1} = 2$.

Δ2.α) Η f έχει πεδίο ορισμού το A=R στο οποίο είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και έχει παράγωγο την

$$f'(x) = \left[\frac{1}{4}\sigma\upsilon\nu^3(3x-2)\right]' = \frac{1}{4}\cdot 3\cdot\sigma\upsilon\nu^2(3x-2)\cdot(\sigma\upsilon\nu(3x-2))' =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu^2(3x-2)\cdot\left[-\eta\mu(3x-2)\right]\cdot(3x-2)' =$$

$$= -\frac{9}{4}\sigma\upsilon\nu^2(3x-2)\cdot\eta\mu(3x-2).$$

β) Πρέπει $\dfrac{1-x}{1+x} > 0 \Leftrightarrow (1-x)\cdot(1+x) > 0 \overset{\varepsilon\tau\varepsilon\rho o\sigma.}{\Longleftrightarrow} -1 < x < 1$, άρα $A_f = (-1,1)$

Η g γράφεται $g(x) = \dfrac{1}{2}\cdot\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = \dfrac{1}{2}\left[\ln(1-x) - \ln(1+x)\right]$ οπότε

$$g'(x) = \frac{1}{2}\cdot\left[(\ln(1-x))' - (\ln(1+x))'\right] =$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{(1-x)'}{1-x}-\frac{(1+x)'}{1+x}\right]=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{x+1-x+1}{(x-1)\cdot(x+1)}=\boxed{\frac{1}{x^2-1}}.$$

γ) Η $f(t)=2^t-x^2+\sigma\varphi t$ ορίζεται για τα t για τα οποία είναι $t\neq\kappa\pi$ και έχει παράγωγο την

$$f'(t)=(2^t-x^2+\sigma\varphi t)'=(2^t)'-(x^2)'+(\sigma\varphi t)'=2^t\cdot\ln 2-0-\frac{1}{\eta\mu^2 t}=$$

$$=\boxed{2^t\cdot\ln 2-\frac{1}{\eta\mu^2 t}}.$$