ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **120**

Β' Λυκείου

Ον/μο:………………………… Γεν. Παιδείας

Ύλη: Συστήματα- Μονοτονία- Ακρότατα 24-09-23

<u>Θέμα 1ο:</u>

Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$ με $\alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$, παριστάνει ευθεία γραμμή. **(8μον.)**

Β. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; **(7μον.)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** Σωστό ή **(Λ)** Λάθος τις παρακάτω προτάσεις :

i. Η $f(x)=5x+3$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. **Σ Λ**

ii. Αν για το σύστημα $\left.\begin{matrix}\alpha x+\beta y=\gamma\\ \alpha' x+\beta' y=\gamma'\end{matrix}\right\}$ ισχύει ότι $D=0$, τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. **Σ Λ**

iii. Το σύστημα $\begin{cases}3x-4y=9\\ -6x+8y=32\end{cases}$ έχει μοναδική λύση. **Σ Λ**

iv. Η $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$ έχει πεδίο ορισμού το $[2,3]$. **Σ Λ**

v. Αν ένα γραμμικό σύστημα 2x2 έχει 2 λύσεις, τότε έχει άπειρο πλήθος λύσεων. **Σ Λ**

(5x2=10μον.)

<u>Θέμα 2ο:</u>

Α. Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{matrix}\dfrac{x-1}{3}+\dfrac{-y+3}{6}=1\\ -\dfrac{x+3}{3}+\dfrac{2x+y}{4}=\dfrac{y-3}{3}\end{matrix}\right\}$. **(10 μον.)**

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3x^5-\dfrac{2}{x}$.

i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $\Delta=(0,+\infty)$. **(6 μον.)**

ii. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(\sqrt{3})$ και $f(\sqrt[3]{5})$. **(4 μον.)**

iii. Να βρείτε την τιμή $f(1)$ και στη συνέχεια, να λύσετε την εξίσωση $f(x)-1=0$ στο $(0,+\infty)$. **(5 μον.)**

Θέμα 3^{o}:

Α. Να λύσετε το σύστημα: $\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+2y-3z=2 \\ 2x+3y-2z=3 \end{array}\right\}$. **(10 μον.)**

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x+3)^2-5,\ x\geq -3$.

i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία.
ii. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης.
iii. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

(3x5=15 μον.)

Θέμα 4^{o}:

Α. Να βρεθεί ένας τριψήφιος φυσικός αριθμός αν :

* Το άθροισμα των ψηφίων του είναι 21.
* Ο αριθμός ελαττώνεται κατά 9,στην περίπτωση που αλλάξει η θέση των δύο τελευταίων ψηφίων του.
* Ο αριθμός ελαττώνεται κατά 90,στην περίπτωση που αλλάξει η θέση των δύο πρώτων ψηφίων του. **(10μον.)**

Β. Μία βιοτεχνία παιχνιδιών κατασκευάζει ποδηλατάκια με τρεις ρόδες και αυτοκινητάκια με τέσσερις ρόδες. Για τα δύο παιχνίδια χρησιμοποιεί τις ίδιες ρόδες. Αυτό το μήνα παρέλαβε 470 ρόδες και θέλει να κατασκευάσει συνολικά 130 παιχνίδια. Πόσα θα κατασκευάσει από κάθε είδος; **(15μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)</u>

<u>Θέμα 1^{ο}:</u>

Α. i. $\alpha x+\beta y=\gamma$ με $\alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

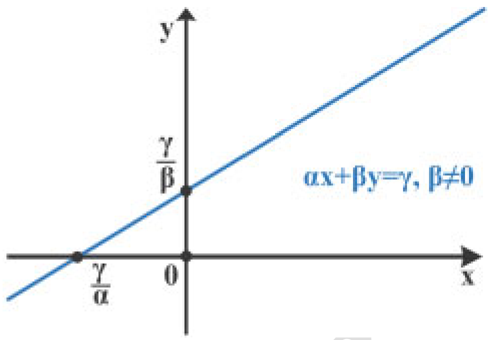
● Αν $\beta\neq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται :

$$\alpha x+\beta y=\gamma \Leftrightarrow \beta y=-\alpha x+\gamma \Leftrightarrow y=\frac{-\alpha}{\beta}x+\frac{\gamma}{\beta}$$

επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία που έχει

συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{\alpha}{\beta}$ και τέμνει τον y΄y στο $\frac{\gamma}{\beta}$.

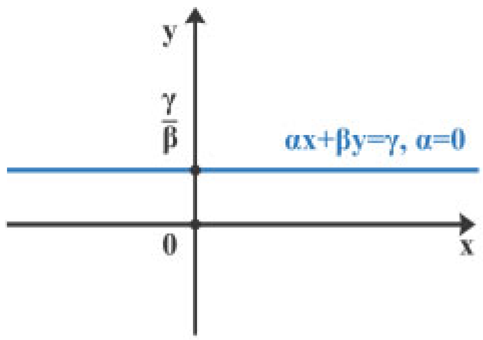
$\rightarrow$ Αν $\alpha\neq 0$, τότε η ευθεία τέμνει και τους δύο άξονες .



$\rightarrow$ Αν α=0 , τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $y=\frac{\gamma}{\beta}$ και

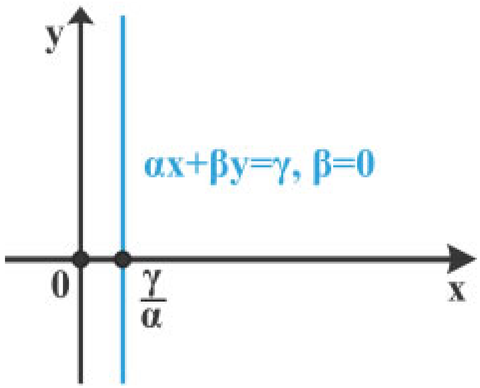
επομένως παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον

άξονα x΄x και τέμνει τον y΄y στο $\frac{\gamma}{\beta}$.



● Αν β=0 , τότε η εξίσωση γράφεται : $\alpha x = \gamma \Leftrightarrow x = \frac{\gamma}{\alpha}$

Επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα y΄y και τέμνει τον y΄y στο $\frac{\gamma}{\alpha}$.



Β. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ’ ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ να ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

Γ. i.Λ **ii.**Λ **iii.** Λ **iv.**Λ **v.**Σ

<u>Θέμα 2ο:</u>

Α.Έχουμε :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x-1}{3}+\frac{-y+3}{6}=1 \\ -\frac{x+3}{3}+\frac{2x+y}{4}=\frac{y-3}{3} \end{array}\right\} \underset{\cdot 12}{\overset{\cdot 6}{\Leftrightarrow}} \left.\begin{array}{l} 2(x-1)+(-y+3)=6 \\ -4(x+3)+3(2x+y)=4(y-3) \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x-2-y+3=6 \\ -4x-12+6x+3y=4y-12 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-y=5 \\ 2x-y=0 \end{array}\right\}$$

Το σύστημα είναι αδύνατο.

Β. i. Έστω $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1 < x_2$, τότε:

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^5 < x_2^5 \Leftrightarrow 3x_1^5 < 3x_2^5$ **(1)**

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow -\frac{2}{x_1} < -\frac{2}{x_2}$ **(2)**

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2) προκύπτει ότι: $f(x_1) < f(x_2)$.

Δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

ii. Έστω ότι $\sqrt{3} < \sqrt[3]{5}$ τότε: $\left(\sqrt{3}\right)^6 < \left(\sqrt[3]{5}\right)^6 \Leftrightarrow 3^3 < 5^2 \Leftrightarrow 27 < 25$ άτοπο.

Επομένως: $\sqrt{3} > \sqrt[3]{5} \overset{f-\text{γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow} f\left(\sqrt{3}\right) > f\left(\sqrt[3]{5}\right)$.

iii. Είναι: $f(1) = 3-2 = 1$ οπότε:

$$f(x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)=1 \Leftrightarrow f(x)=f(1) \overset{f-\text{γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow} x=1.$$

<u>Θέμα 3ο:</u>

Α. Έχουμε το σύστημα: $\left.\begin{array}{ll} x+y+z=1 & (1) \\ x+2y-3z=2 & (2) \\ 2x+3y-2z=3 & (3) \end{array}\right\}$

Η (1) $\Rightarrow x = 1-y-z$ (4)

$$\left.\begin{array}{l}(2)\\(3)\end{array}\right\} \overset{(4)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{l} 1-y-z+2y-3z=2 \\ 2-2y-2z+3y-2z=3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y-4z=1 \\ y-4z=1 \end{array}\right\}.$$

Το σύστημα των (2) και (3) έχει άπειρες λύσεις, οπότε και το αρχικό σύστημα θα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x,y,z) = (-5z, 1+4z, z)$, $z \in \mathbb{R}$.

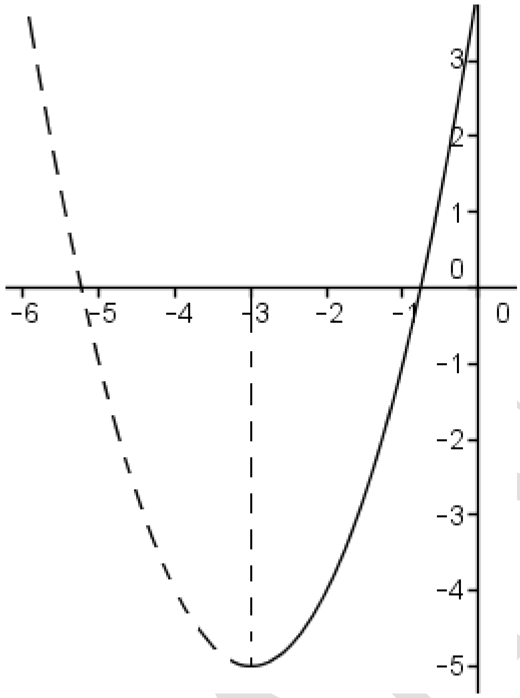
Β. i. Έστω

$x_1,\ x_2 \in A=[-3,+\infty)$ με $x_1<x_2 \Rightarrow x_1+3<x_2+3 \Rightarrow (x_1+3)^2<(x_2+3)^2 \Rightarrow$
$(x_1+3)^2-5<(x_2+3)^2-5 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο Α.

ii. Είναι:

$x \ge -3 \Rightarrow x+3 \ge 0 \Rightarrow (x+3)^2 \ge 0 \Rightarrow (x+3)^2-5 \ge -5 \Rightarrow f(x) \ge -5$,με το = να ισχύει για $x=-3$. Αρα η f έχει ολικό ελάχιστο το -5 στο -3.

iii. Η C_f είναι η του σχήματος:



<u>Θέμα 4ο:</u>

Α. Έστω x, y, z τα ψηφία του αριθμού. Τότε έχουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$\left.\begin{aligned} &x+y+z=21\\ &100x+10y+z-9=100x+10z+y\\ &100x+10y+z-90=100y+10x+z\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned} &x+y+z=21\\ &9y-9z=9\\ &90x-90y=90\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &x+y+z=21 && (1)\\ &y-z=1 && (2)\\ &x-y=1 && (3)\end{aligned}\right\}$$

Προσθέτουμε τις (1), (2), (3) κατά μέλη και προκύπτει $2x+y=23$ (4).

$$\left.\begin{aligned}(4)\\(3)\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}2x+y=23\\x-y=1\end{aligned}\right\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}\left.\begin{aligned}3x=24\\x-y=1\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}x=8\\y=7\end{aligned}\right\}.$$

Για x=8 και y=7 έχουμε ότι z=6. Επομένως, ο ζητούμενος αριθμός είναι το 876.

Β. Έστω x τα ποδηλατάκια και y τα αυτοκινητάκια. Τότε:

$$\left.\begin{matrix} x+y=130 \\ 3x+4y=470 \end{matrix}\right\} \overset{\cdot(-3)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{matrix} -3x-3y=-390 \\ 3x+4y=470 \end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} y=80 \\ x=50 \end{pmatrix}.$$

Άρα η βιοτεχνία θα κατασκευάσει 50ποδηλατάκια και 80 αυτοκινητάκια.