ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ον/μο:……………….. **110**

Ύλη: Όλη η ύλη **Α΄ Λυκείου**

09-04-23

<u>Θέμα 1ο:</u>

Α. Τι ονομάζουμε ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α; **(5 μον.)**

Β. Τι ονομάζουμε συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β; **(5 μον.)**

Γ. Για τους πραγματικούς αριθμούς α και β να αποδείξετε ότι $|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$ **(5 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με (**Σ**) **Σωστό** ή (**Λ**) **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Η τετραγωνική ρίζα είναι πάντα θετικός αριθμός. **Σ Λ**

ii. $|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|$. **Σ Λ**

iii. Το άθροισμα των ριζών ενός τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\ne 0$ συμβολίζεται με S και ισούται με $-\dfrac{\beta}{\alpha}$. **Σ Λ**

iv. Σε μια αριθμητική πρόοδο ο τυχαίος ή ν-οστός όρος της, δίνεται από τη σχέση $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$. **Σ Λ**

v. Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. **Σ Λ**

(5x2=10μον.)

<u>Θέμα 2ο:</u>

Δίνονται οι παραστάσεις $A=\left|\sqrt{15}-4\right|+\left|3-\sqrt{15}\right|+\sqrt[5]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}\cdot\sqrt[3]{4}$

και $B=5+8+11+\ldots+155$.

Α. Να δείξετε ότι Α=3. **(5 μον.)**

Β. Να δείξετε ότι Β=4080. **(5 μον.)**

Γ. Να λύσετε την ανίσωση $|1-2y|\le A$. **(5 μον.)**

Δ. Να λύσετε την εξίσωση : $\left(x^7+Bx\right)\left(x^3-64\right)=3-A$. **(5 μον.)**

Θέμα 3^{o}:

Δίνονται οι αριθμοί x και y για τους οποίους ισχύει $x=\sqrt[3]{8\cdot 4^{\frac{3}{2}}}$ και $|y-3|<2$, οι παραστάσεις:

$*$ $A=\dfrac{x}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{2}{\sqrt{3}-2}$.

$*$ $B=|y-1|+|y-5|+\sqrt{x}$.

και η εξίσωση $Ax^2+Bx+\Gamma=0$, που έχει ρίζα τον αριθμό 5.

Α. Να δείξετε ότι x=4 και $1<y<5$. **(5 μον.)**
Β. Να δείξετε ότι Α=-2 και Β=6. **(5 μον.)**
Γ. Να δείξετε ότι Γ=20. **(5 μον.)**
Δ. Να λύσετε την εξίσωση $Ax^2+Bx+\Gamma=0$. **(5 μον.)**
Ε. Να λύσετε την εξίσωση $A(3\omega-2)^2+B|2-3\omega|+\Gamma=0$. **(5 μον.)**

Θέμα 4^{o}:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\lambda x-3, & x\geq 4\\ \mu x+3, & x<4\end{cases}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία $A(4,-1)$ και $B(-1,4)$.

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. **(5 μον.)**
Β. Να δείξετε ότι $\lambda=\dfrac{1}{2}$ και $\mu=-1$. **(5 μον.)**
Γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες. **(5 μον.)**
Δ. Να λύσετε την ανίσωση $x^2+f(0)\cdot x\leq f(3)-f(f(-7))$. **(5 μον.)**
Ε. Να γίνει η γραφική της παράσταση. **(5 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(Ενδεικτικές)

Θέμα 1^{ο}:

Α. Θεωρία
Β. Θεωρία
Γ. Θεωρία
Δ. **i.** Λ **ii.** Σ **iii.** Σ **iv.** Σ **v.** Λ

Θέμα 2^{ο}:

Α.

$$A=\left|\sqrt{15}-4\right|+\left|3-\sqrt{15}\right|+\sqrt[5]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}\cdot\sqrt[3]{4}$$

$$A=4-\sqrt{15}+\sqrt{15}-3+\sqrt[5]{2\sqrt{2\cdot 2^{\frac{1}{3}}}}\cdot\sqrt[3]{4}$$

$$A=1+\sqrt[5]{2\sqrt{2^{\frac{4}{3}}}}\cdot\sqrt[3]{4}=1+\sqrt[5]{2\cdot 2^{\frac{2}{3}}}\cdot\sqrt[3]{4}$$

$$A=1+\sqrt[5]{2^{\frac{5}{3}}}\cdot\sqrt[3]{4}=1+2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{3}}=1+8^{\frac{1}{3}}$$

$$A=1+\sqrt[3]{8}=1+2=3$$

Β. Η παράσταση Β είναι άθροισμα όρων αριθμητικής προόδου με $\alpha_1=5,\ \alpha_\nu=155$ και $\omega=3$. Είναι:

$$\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega\Leftrightarrow 155=5+3(\nu-1)\Leftrightarrow 155=3\nu+2\Leftrightarrow$$

$$3\nu=153\Leftrightarrow\nu=51$$

Οπότε το ζητούμενο άθροισμα είναι:

$$B=5+8+11+...+155=\frac{51}{2}(5+155)=\frac{51}{2}\cdot 160=4080$$

Γ. Έχουμε:

$$|1-2y|\le A\Leftrightarrow|1-2y|\le 3\Leftrightarrow -3\le 1-2y\le 3\Leftrightarrow -4\le -2y\le 2\Leftrightarrow$$

$$2\ge y\ge -1$$

Δ. Είναι:

$$\left(x^7+4080x\right)\left(x^3-64\right)=0\Leftrightarrow x\left(x^6+4080\right)\left(x^3-64\right)=0\Leftrightarrow$$

$x=0$ ή

$x^6+4080=0\Leftrightarrow x^6=-4080$ αδύνατη ή

$x^3-64=0\Leftrightarrow x^3=64\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{64}\Leftrightarrow x=4$

Θέμα 3ο:

Α. Είναι: $x=\sqrt[3]{8\cdot 4^{\frac{3}{2}}}=\sqrt[3]{2^3\cdot\left(2^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\sqrt[3]{2^3\cdot 2^3}=\sqrt[3]{2^6}=2^{\frac{6}{3}}=2^2=4$ και

$|y-3|<2\Leftrightarrow -2<y-3<2\Leftrightarrow 1<y<5.$

Β. Έχουμε:

$$A=\frac{4}{\sqrt{3}-1}+\frac{2}{\sqrt{3}-2}=\frac{4\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}+\frac{2\left(\sqrt{3}+2\right)}{\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}+2\right)}=$$

$$\frac{4\left(\sqrt{3}+1\right)}{3-1}+\frac{2\left(\sqrt{3}+2\right)}{3-4}=2\left(\sqrt{3}+1\right)-2\left(\sqrt{3}+2\right)=$$

$$2\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}-4=-2$$

και $B=|y-1|+|y-5|+\sqrt{x}=y-1+5-y+\sqrt{4}=4+2=6.$

Γ. Εφόσον η εξίσωση $Ax^2+Bx+\Gamma=0$ έχει ρίζα τον αριθμό 5 είναι: $-2\cdot 5^2+6\cdot 5+\Gamma=0\Leftrightarrow -50+30+\Gamma=0\Leftrightarrow \Gamma=20.$

Δ. Είναι:

$Ax^2+Bx+\Gamma=0\Leftrightarrow -2x^2+6x+20=0\Leftrightarrow x^2-3x-10=0\Leftrightarrow$

$x=-2$ ή $x=5.$

Ε. Έχουμε:

$$A\left(3\omega-2\right)^2+B|2-3\omega|+\Gamma=0\Leftrightarrow$$

$$-2\left(3\omega-2\right)^2+6|3\omega-2|+20=0\overset{\text{Θέτουμε: }|3\omega-2|=\varphi}{\Leftrightarrow}$$

$$-2\varphi^2+6\varphi+20=0\Leftrightarrow \varphi^2-3\varphi-10=0\overset{\text{Δ.Ερώτημα}}{\Leftrightarrow}$$

$\varphi=-2$ ή $\varphi=5$

Οπότε:

$|3\omega-2|=-2$ απορ. ή

$$|3\omega-2|=5\Leftrightarrow\begin{cases}3\omega-2=-5\\3\omega-2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\omega=-3\\3\omega=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\omega=-1\\\omega=\dfrac{7}{3}\end{cases}$$

Θέμα 4$^{\text{ο}}$:

Α. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=\mathbb{R}$.

Β. Εφόσον , η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(4,-1)$ και $B(-1,4)$ θα επαληθεύεται από αυτά. Οπότε:

$$\left.\begin{array}{l} f(4)=-1 \\ f(-1)=4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 4\lambda-3=-1 \\ -\mu+3=4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 4\lambda=2 \\ -\mu=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda=\dfrac{1}{2} \\ \mu=-1 \end{array}\right\} .$$

Επομένως, η f είναι:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}x-3, & x\geq 4 \\ -x+3, & x<4 \end{cases}$$

Γ. Για να τέμνει η f τον άξονα $x'x$ πρέπει y=0

Για $x\geq 4$ είναι: $\frac{1}{2}x-3=0 \Leftrightarrow x-6=0 \Leftrightarrow x=6$ άρα στο $A(6,0)$.

Για x<4 είναι: $-x+3=0 \Leftrightarrow x=3$ άρα στο $B(3,0)$.

Για να τέμνει η f τον άξονα $y'y$ πρέπει x=0 οπότε, $f(0)=3$ οπότε στο $\Gamma(0,3)$.

Δ. Έχουμε: $x^2+f(0)\cdot x\leq f(3)-f(f(-7))$.

Είναι: $f(0)=3$, $f(3)=-3+3=0$, $f(f(-7))=f(10)=2$.

Οπότε: $x^2+3x\leq -2 \Leftrightarrow x^2+3x+2\leq 0 \Leftrightarrow x\in[-2,-1]$.

Ε. Η γραφική παράσταση της f είναι: