

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

85

Ον/μο:.....

Γ' Γυμνασίου

Ύλη : Εξισώσεις – Ανισώσεις

13 -03-23

Θέμα 1^ο :

A. Τι ονομάζουμε εξίσωση δευτέρου βαθμού; (7 μον.)

B. Πως παραγοντοποιείται ένα τριώνυμο της μορφής $ax^2 + \beta x + \gamma$ με ρίζες x_1 και x_2 . (8 μον.)

Γ. Να χαρακτηρίσετε με (Σ) Σωστό ή (Λ) Λάθος τις παρακάτω προτάσεις :

i. Η εξίσωση $(x + 1)^2 - 2x^2 = 5x + 7 - x^2$ είναι δευτέρου βαθμού. Σ Λ

ii. Η εξίσωση $9x^2 - 12x + 4 = 0$ έχει δύο άνισες λύσεις. Σ Λ

iii. Αν $a < \beta$ τότε $a \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$. Σ Λ

iv. Αν $-1 < x < 2$ τότε $2 < x + 3 < 5$. Σ Λ

v. Η εξίσωση $0x = 3$ είναι αδύνατη. Σ Λ

(5x2=10 μον.)

Θέμα 2^ο :

A. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $x^2(x - 4) + 2x(x - 4) + (x - 4) = 0$.

ii. $2x^2 - 5x + 3 = 0$.

(2x9=18 μον.)

B. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 + 4x - 6$. (7 μον.)

Θέμα 3^ο :

A. Να βρείτε δύο διαδοχικούς άρτιους φυσικούς αριθμούς, αν είναι γνωστό ότι το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 100. (7 μον.)

B. i. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$2x + 5 < \frac{x}{2} + 2$ και $\frac{x-1}{2} + 1 > x + \frac{1}{3}$ (10 μον.)

ii. Αν $-3 < x < 5$ και $1 < y < 2$, να αποδείξετε ότι: $-5 < x - y < 4$.

(7 μον.)

Θέμα 4^ο:

A. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

$$6x^2 - x - 1 \text{ και } -4x^2 + 4x - 1$$

(2x5=10 μον.)

B. Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = \frac{6x^2 - x - 1}{-4x^2 + 4x - 1}$. (15 μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(Ενδεικτικές)

Θέμα 1^ο :

A. Μία εξίσωση της μορφής $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ ονομάζεται εξίσωση δευτέρου βαθμού.

B. Ένα τριώνυμο της μορφής $ax^2 + bx + \gamma$ με ρίζες x_1 και x_2 παραγοντοποιείται ως εξής: $ax^2 + bx + \gamma = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Γ. i. Λ ii. Λ iii. Λ iv. Σ v. Σ

Θέμα 2^ο :

A. i. $x^2(x - 4) + 2x(x - 4) + (x - 4) = 0 \Leftrightarrow$

$(x - 4)(x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$x - 4 = 0 \Leftrightarrow$ ή $x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$x = 4$ ή $(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$x = -1$ διπλή λύση

ii. $2x^2 - 5x + 3 = 0$

Είναι $a=2$, $\beta=-5$ και $\gamma=3$. Η διακρίνουσα είναι :

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1 > 0$. Άρα η εξίσωση έχει

2 άνισες λύσεις τις: $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{5-1}{4} = 1 \end{cases}$.

B. Λύνουμε την αντίστοιχη εξίσωση $2x^2 + 4x - 6 = 0$.

Είναι $a=2$, $\beta=4$ και $\gamma=-6$. Η διακρίνουσα είναι :

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 16 + 48 = 64 > 0$. Άρα η εξίσωση έχει

2 άνισες λύσεις τις: $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-4 \pm 8}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{-4+8}{4} = 1 \\ x_2 = \frac{-4-8}{4} = -3 \end{cases}$.

Οπότε το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής :

$2x^2 + 4x - 6 = 2(x - 1)(x + 3)$

Θέμα 3^ο :

A. Έστω $2k$ ο ένας άρτιος. Τότε ο άλλος θα είναι $2k+2$. Οπότε:

$$(2k)^2 + (2k + 2)^2 = 100 \Leftrightarrow$$

$$4k^2 + 4k^2 + 8k + 4 - 100 = 0 \Leftrightarrow$$

$$8k^2 + 8k - 96 = 0 \Leftrightarrow$$

$$k^2 + k - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(k - 3)(k + 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$k = 3 \text{ ή } k = -4 \text{ απόρ.}$$

Για $k=3$ οι ζητούμενοι άρτιοι είναι 6 και 8.

B. $2x + 5 < \frac{x}{2} + 2 \Leftrightarrow$ και $\frac{x-1}{2} + 1 > x + \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$$4x + 10 < x + 4 \Leftrightarrow 6 \frac{(x-1)}{2} + 6 > 6x + 6 \cdot \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$4x - x < 4 - 10 \Leftrightarrow 3(x-1) + 6 > 6x + 2 \Leftrightarrow$$

$$3x < -6 \Leftrightarrow 3x - 3 + 6 > 6x + 2 \Leftrightarrow$$

$$x < -2 \Leftrightarrow 3x - 6x > 2 + 3 - 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3x > -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$$

Άρα οι κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι $x < -2$.

ii. $\left. \begin{matrix} -3 < x < 5 \\ 1 < y < 2 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} -3 < x < 5 \\ (-1) - 1 > -y > -2 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} -3 < x < 5 \\ -2 < -y < -1 \end{matrix} \right\} \stackrel{(+)}{\Leftrightarrow} -5 < x - y < 4.$

Θέμα 4^ο :

A. Η εξίσωση $6x^2 - x - 1 = 0$ έχει $\alpha=6$, $\beta=-1$ και $\gamma=-1$ και

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1) = 1 + 24 = 25 > 0$$

$$\text{Οι ρίζες της είναι: } x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1 \pm 5}{12} = \begin{cases} x_1 = \frac{1+5}{12} = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{1-5}{12} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Οπότε: } 6x^2 - x - 1 = 6 \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(x + \frac{1}{3} \right) = (2x - 1)(3x + 1) .$$

$$\text{Επίσης, } -4x^2 + 4x - 1 = -(4x^2 - 4x + 1) = -(2x - 1)^2 .$$

$$\text{B. } A = \frac{6x^2 - x - 1}{-4x^2 + 4x - 1} = \frac{(2x - 1)(3x + 1)}{-(2x - 1)^2} = -\frac{3x + 1}{2x - 1} .$$