

Ον/μο:.....
Υλη:Συναρτήσεις-Παράγωγοι**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$. (μον.7)
- A2.** Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο; (μον.4)
- A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά. (μον.4)
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α)** Κάθε συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
- β)** $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = -\infty$.
- γ)** Για κάθε συνάρτηση f , το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα της f , εφόσον υπάρχουν, είναι το ολικό μέγιστο αυτής.
- δ)** $(\ln |x|)' = -\frac{1}{x}$, για κάθε $x < 0$.
- ε)** Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ . (μον.10)

ΘΕΜΑ Β

B1. Να αποδείξετε ότι η διμελής σχέση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \text{ ορίζει συνάρτηση.} \quad (\text{μον.5})$$

B2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. (μον.4)

B3. Να εξετάσετε αν η f είναι 1-1. (μον.4)

B4. Να ορίσετε, αν ορίζεται, την f^{-1} και τις $C_f, C_{f^{-1}}$. (μον.4)

B5. Αν $\alpha > 2$ να δείξετε ότι $f(\alpha^4 + \alpha) < f(4\alpha^2 + 2)$. (μον.4)

B6. Να αποδείξετε ότι: $\frac{|κ + λ| + 1}{|κ + λ|} \geq 1 + \frac{1}{|κ| + |λ|}, κ, λ \neq 0, κ \neq -λ$. (μον.4)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $f(x^3) = 3x^4 + 1$,
 $\forall x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f = \mathbb{R}$.

(μον.4)

Γ2. Να βρείτε τον τύπο της f .

(μον.6)

Γ3. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, να βρείτε τον $f'(0)$.

(μον.6)

Γ4. Αν $x \geq 1$, να δείξετε ότι $f(x+1) - f(x) > f'(x) > f(x) - f(x-1)$.

(μον.5)

Γ5. Αν η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. (μον.4)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύουν

$$f^2(x)f'(x) = \frac{1}{3}e^x \text{ και } f(0)=3, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1).$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (μον.2)

Δ2. Να βρείτε τον τύπο της f . (μον.6)

Δ3. Να δείξετε ότι $27 \cdot f(x) \geq x + 81$. (μον.4)

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $x(f'(x) - f(x)) = f(x) \quad (1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και $f(1)=e$, $f(-1) = e^{-1}$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f . (μον.4)

β) Αν $f(x) = xe^x$, $x > 0$ και $h(x) = f(x) - x^2 + e^x - xe^x$ να εξετάσετε αν η C_h έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. (μον.4)

Δ5. Ένας δρομέας διανύει μια απόσταση 6 Km σε 30 λεπτά. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τμήμα της διαδρομής, μήκους 1 km, το οποίο ο δρομέας το διανύει ακριβώς σε 5 λεπτά. (μον.5)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχ. Βιβλίο

A2. Σχ. Βιβλίο

A3. Σχ. Βιβλίο

A4. α) Λ β) Λ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Εστω $x_1 = x_2 \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Rightarrow \frac{1}{x_1} + 1 = \frac{1}{x_2} + 1 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Άρα η f είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$ αφού πληρεί τον ορισμό της συνάρτησης.

B2. Η $f(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$ έχει $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R}^*$ και ο πίνακας

μεταβολών είναι ο παρακείμενος.

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

Δεν είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της.

x	$-\infty$	A_1	0	A_2	$+\infty$	
f'	—			—		
f	1	↓	$-\infty$	$+\infty$	↓	1

B3. Εστω $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} \neq \frac{1}{x_2} \Rightarrow \frac{1}{x_1} + 1 \neq \frac{1}{x_2} + 1 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, άρα η f είναι 1-1.

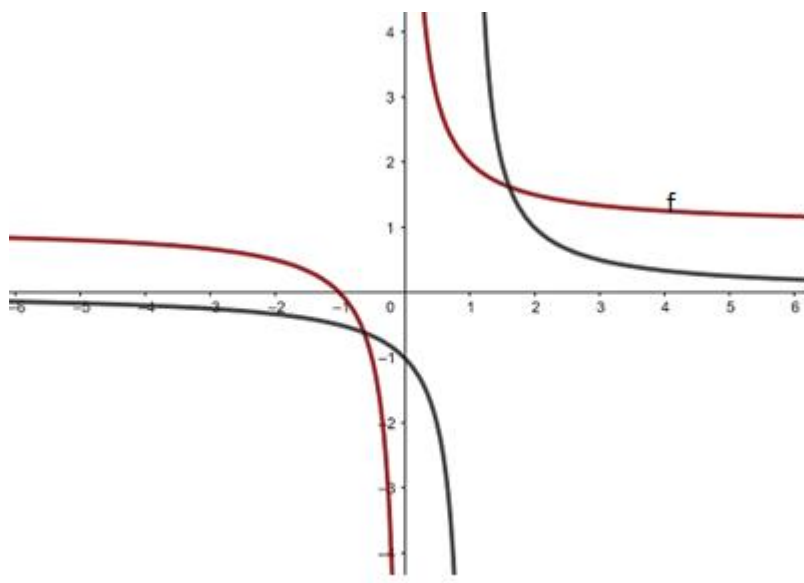
B4. Επειδή η f είναι 1-1 (B3), αντιστρέφεται. Είναι

$$A_{f^{-1}} = f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) \cup \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

Απ' την εξίσωση $f(x) = y \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x} = y \Leftrightarrow \frac{1}{x} = y - 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{y - 1}$ άρα

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x - 1}.$$

Οι γραφικές παραστάσεις της f και της αντίστροφης είναι:



B5.Είναι: $\alpha > 2 \Rightarrow \alpha^2 > 4 > 1$ και άρα:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha > 2 \\ \alpha^2 > 4 > 1 \Rightarrow \alpha^4 > \alpha^2 \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} \alpha^4 + \alpha > \alpha^2 + 2 \xrightarrow[(0, +\infty)]{f \searrow} f(\alpha^4 + \alpha) < f(\alpha^2 + 2)$$

B6.Είναι $|\kappa + \lambda|, |\kappa|, |\lambda| > 0$ και $|\kappa + \lambda| \leq |\kappa| + |\lambda| \xrightarrow[(0, +\infty)]{f \searrow} f(|\kappa + \lambda|) \geq f(|\kappa| + |\lambda|)$

$$\Rightarrow \frac{|\kappa + \lambda| + 1}{|\kappa + \lambda|} \geq 1 + \frac{1}{|\kappa| + |\lambda|}.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.Εστω $g(x) = x^3$ που έχει $A_g = \mathbb{R}$. Η $f(x^3)$ είναι η σύνθεση

$f \circ g$ με $A_{f \circ g} = \mathbb{R}$ κατά την εκφώνηση. Επειδή το πεδίο ορισμού της σύνθεσης είναι το $\mathbb{R}$ και το σύνολο τιμών της g είναι το $\mathbb{R}$, θα ισχύει ότι $g(A_g) = \mathbb{R} \subseteq A_f$. Ομως $A_f \subseteq \mathbb{R}$, άρα $A_f = \mathbb{R}$.

Γ2. Είναι $f(x^3) = 3x^4 + 1$ (1). Θέτω $x^3 = t \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{t}, & t \geq 0 \\ x = -\sqrt[3]{-t}, & t < 0 \end{cases}$ οπότε η

$$(1) \text{ δίνει } f(t) = \begin{cases} 3(\sqrt[3]{t})^4 + 1, & t \geq 0 \\ 3(-\sqrt[3]{-t})^4 + 1, & t < 0 \end{cases} \text{ ή } f(x) = \begin{cases} 3x\sqrt[3]{x} + 1, & x \geq 0 \\ -3x\sqrt[3]{-x} + 1, & x < 0 \end{cases}.$$

Γ3. Έχουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε μπορώ να παραγωγίσω τα μέλη της (1) και προκύπτει $3x^2 f'(x^3) = 12x^3$ (2), σχέση απ' την οποία δεν προκύπτει η $f'(0)$. Θα βρώ την $f'(0)$ με τον ορισμό.

$$\bullet \text{ Αν } x < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-3x\sqrt[3]{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-3\sqrt[3]{-x}) = 0$$

$$\bullet \text{ Αν } x > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3\sqrt[3]{x}) = 0,$$

άρα $f'(0) = 0$.

Γ4. Εστω $x \geq 1$.

Από Θ.Μ.Τ προκύπτει ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (x-1, x)$ και $\xi_2 \in (x, x+1)$ ώστε $f'(\xi_1) = f(x) - f(x-1)$ και $f'(\xi_2) = f(x+1) - f(x)$.

$$\text{Είναι } f'(x) = (3\sqrt[3]{x^4} + 1)' = (3x^{\frac{4}{3}})' = 4x^{\frac{1}{3}} \text{ και } f''(x) = \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} > 0, \forall x > 0.$$

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα.

$$\text{Αφού } \xi_1 < x < \xi_2 \xrightarrow{f'} f'(\xi_1) < f'(x) < f'(\xi_2) \Rightarrow f(x) - f(x-1) < f'(x) < f(x+1) - f(x). \quad (1)$$

Γ5. Αφού η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ θα ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \text{ οπότε και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x-1) \stackrel{x-1=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = \ell,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) \stackrel{x+1=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = \ell. \text{ Έτσι}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - f(x-1)) = \ell - \ell = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = \ell - \ell = 0$$

Σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $\frac{1}{3}e^x > 0 \Rightarrow f^2(x) \cdot f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Επειδή είναι και συνεχής διατηρεί πρόσημο και αφού $f(0)=3>0$, είναι $f(x)>0$.

Δ2. Η (1) γράφεται $3f^2(x) \cdot f'(x) = e^x \Leftrightarrow (f^3(x))' = (e^x)' \Leftrightarrow f^3(x) = e^x + c$
 $\stackrel{f(0)=3}{\Leftrightarrow} \stackrel{c=26}{f^3(x) = e^x + 26} \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{e^x + 26}, x \in \mathbb{R}.$

Δ3. Είναι $f'(x) = [(e^x + 26)^{\frac{1}{3}}]' = \frac{1}{3}(e^x + 26)^{-\frac{2}{3}} \cdot e^x$ και

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{3} \left(-\frac{2}{3} \right) (e^x + 26)^{-\frac{5}{3}} \cdot e^{2x} + \frac{1}{3} (e^x + 26)^{-\frac{2}{3}} \cdot e^x = \\ &= \frac{1}{3} (e^x + 26)^{-\frac{2}{3}} \cdot e^x \cdot \left[-\frac{2}{3} (e^x + 26)^{-1} \cdot e^x + 1 \right] = \\ &= \frac{1}{3} (e^x + 26)^{-\frac{2}{3}} \cdot e^x \cdot \left[-\frac{2}{3} \cdot \frac{e^x}{e^x + 26} + 1 \right] = \\ &= \frac{1}{3} (e^x + 26)^{-\frac{2}{3}} \cdot e^x \cdot \left[\frac{e^x + 26}{3(e^x + 26)} \right] > 0 \text{ οπότε η } f \text{ είναι κυρτή.} \end{aligned}$$

Η εφαπτομένη της

C_f στο $x_0=0$ είναι η $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = \frac{1}{27}x + 3$ και

$$f(x) \geq \frac{1}{27}x + 3 \Leftrightarrow 27f(x) \geq x + 81.$$

Δ4.

α) Απ' την (1) έχουμε:

$$f'(x) \cdot x - f(x) = x \cdot f(x) \Leftrightarrow \frac{x \cdot f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{f(x)}{x} \right]' = \frac{f(x)}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^* \text{ και επειδή η ισότητα ισχύει σε σύνολο}$$

$$\text{και όχι σε διάστημα είναι } \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} c_1 \cdot e^x, & x < 0 \\ c_2 \cdot e^x, & x > 0 \end{cases} \begin{matrix} f(-1)=e \Rightarrow c_1=-1 \\ f(1)=e \Rightarrow c_2=1 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} -xe^x, & x < 0 \\ xe^x, & x > 0 \end{cases}.$$

Δ5. Είναι $h(x) = x \cdot e^x - x^2 + e^x - x \cdot e^x = e^x - x^2, x > 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2) \stackrel{(+\infty)-(+\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x \left(1 - \frac{x^2}{e^x} \right) \right] =$$

$$= (+\infty) \cdot (1 - 0) = +\infty$$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{e^x} \right) \stackrel{\frac{(+\infty)}{(+\infty)}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{e^x} \right) \stackrel{\frac{(+\infty)}{(+\infty)}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{e^x} \right) = 0.$$

Αρα η συνάρτηση δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Δ6. Μια λογική επεξεργασία είναι: Αποκλείεται κάθε ένα από τα έξι χιλιόμετρα να το κάνει σε περισσότερα ή λιγότερα από 5 λεπτά. Κάποιο λοιπόν χιλιόμετρο θα το διανύσει σε ακριβώς 5 λεπτά.

Ας μαθηματικοποιήσουμε τώρα την απάντησή μας.

Εστω x η απόσταση σε km που διανύει ο δρομέας απ' το ξεκίνημα και $f(x)$ ο χρόνος για να καλύψει την απόσταση από τη θέση x έως την $x+1$, δηλ. ενός km.

Η f είναι συνεχής και $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 30$.

Οι αριθμοί αυτοί δεν μπορεί να είναι όλοι μεγαλύτεροι η μικρότεροι του 5. Υπάρχουν λοιπόν $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ώστε $f(\alpha) \leq 5 \leq f(\beta)$.

Σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει, λόγω και του $=$, $\gamma \in [\alpha, \beta]$ ώστε $f(\gamma) = 5$. Ο δρομέας λοιπόν διανύει την απόσταση από τα γ έως το $\gamma+1$ δηλ. του ενός km σε 5 λεπτά.