## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**31**

**Ον/μο:………………..** **Γ' Λυκείου(ΕΠΑ.Λ)**

**Ύλη: Διαφορικός Λογισμός** **06-11-22**

**<u>Θέμα 1<sup></sup></u>**

**<u>Θέμα 1ο</u>:**

**Α.** Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x_0$ του πεδίου ορισμού της; **(5 μον.)**

**Β.** Να αποδείξετε ότι η $f(x)=x$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η παράγωγός της είναι $f'(x)=1$. **(6 μον.)**

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** **Σωστό** ή **(Λ)** **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

**i.** Μια συνεχής συνάρτηση στο $x_0$ είναι υποχρεωτικά και παραγωγίσιμη στο $x_0$. **Σ Λ**

**ii.** Ισχύει ότι $\left(\sqrt{3}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{3}}$ . **Σ Λ**

**iii.** $\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$. **Σ Λ**

**iv.** Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\kappa$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|\kappa|$ . **Σ Λ**

**v.** Η $f(x)=|x|$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ . **Σ Λ**

**(5x2=10 μον.)**

**Ε.** Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

**i.** $(\sigma\upsilon\nu x)'=$................ .

**ii.** $\left(\sqrt{x}\right)'=$............ .

**iii.** $\left(x^3+5x\right)'=$........................ .

**iv.** $(2x+\varepsilon\varphi x)'=$.............. . **(4x1=4 μον.)**

**<u>Θέμα 2$^{ο}$</u>:**

**A.** Να υπολογίσετε τα όρια:

**i.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+5}{x^2-6}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3\sqrt{x}-3}{1-\sqrt{x^2}}$

**iii.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$ **iv.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{2+x}}{x^2-5x+6}$

**v.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

**(5x3=15 μον.)**

**B.** Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

**i.** $f(x)=5x+\dfrac{1}{3}x^3$

**ii.** $g(x)=3+\eta\mu\pi-\dfrac{1}{2}x$

**iii.** $h(x)=x\cdot\sigma\upsilon\nu x$

**iv.** $w(x)=x^3\cdot\dfrac{1}{\eta\mu x}$ **(4x2,5=10μον.)**

**<u>Θέμα 3$^{ο}$</u>:**

**A.** Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3x+4}-4}{x-4} & ,x\in\left[-\dfrac{4}{3},4\right)\cup(4,+\infty)\\ 2\alpha^2+\alpha-\dfrac{5}{8} & ,x=4\end{cases}.$$

Να βρείτε την τιμή του α έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στο 4. **(13 μον.)**

**B.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x+2$ .

**i.** Να βρείτε τις $f'$ και $f''$ . **(3 μον.)**

**ii.** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$A=f'(3)+f''(2022)$ **(4 μον.)**

**iii.** Να αποδείξετε ότι: $f'(x)+f''(x)=2x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ . **(5 μον.)**

**<u>Θέμα 4ο</u>:**

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=8x\cdot\sqrt{x-4}$ και

$g(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+2022$

**Α.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+12}}$ . **(5 μον.)**

**Β.** Να δείξετε ότι: $\frac{g'(-2)+g''(2)}{2}=2$ . **(7 μον.)**

**Γ.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(3+h)-g(3)}{h}$ . **(6 μον.)**

**Δ.** Να δείξετε ότι $f(20)-8g''(2)=616$ . **(7 μον.)**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

## Απαντήσεις (ενδεικτικές)

**Θέμα 1$^o$:**

**Α.** Μία συνάρτηση $f$ λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x_0$ του πεδίου ορισμού της όταν το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

**Β.** Είναι:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x_0+h-x_0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1\ .$$

**Δ. i.** Λ **ii.** Λ **iii.** Σ **iii.** Σ **iv.** Λ

**Ε. i.** $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$ .

**ii.** $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ .

**iii.** $\left(x^3+5x\right)'=3x^2+5$ .

**iv.** $(2x+\varepsilon\varphi x)'=2+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ .

**Θέμα 2$^o$:**

**Α. i.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+5}{x^2-6}=\dfrac{3+5}{3^2-6}=\dfrac{8}{3}$

**ii.**

$$\lim_{x\to 1}\frac{3\sqrt{x}-3}{1-\sqrt{x^2}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{3\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(1-x)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)}{(1-x)\left(\sqrt{x}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-3}{\left(\sqrt{x}+1\right)}=-\frac{3}{2}$$

**iii.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-1)}{(x+3)}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

**iv.**

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{2+x}}{x^2-5x+6}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 2}\frac{\left(x-\sqrt{2+x}\right)\left(x+\sqrt{2+x}\right)}{(x-2)(x-3)\left(x+\sqrt{2+x}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2-x}{(x-2)(x-3)\left(x+\sqrt{2+x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x-3)\left(x+\sqrt{2+x}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)}{(x-3)\left(x+\sqrt{2+x}\right)}=\frac{3}{-4}$$

**v.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^2+x+1\right)}{(x+1)}=\dfrac{3}{2}$

**B. i.** $f'(x)=\left(5x+\dfrac{1}{3}x^3\right)'=5+x^2$

**ii.** $g'(x)=\left(3+\eta\mu\pi-\dfrac{1}{2}x\right)'=-\dfrac{1}{2}$

**iii.** $h'(x)=(x\cdot\sigma\upsilon\nu x)'=(x)'\cdot\sigma\upsilon\nu x+x\cdot(\sigma\upsilon\nu x)'=\sigma\upsilon\nu x-x\cdot\eta\mu x$

**iv.**

$$w'(x)=\left(x^3\cdot\frac{1}{\eta\mu x}\right)'=\left(x^3\right)'\cdot\frac{1}{\eta\mu x}+x^3\cdot\left(\frac{1}{\eta\mu x}\right)'=$$

$$3x^3\cdot\frac{1}{\eta\mu x}+x^3\cdot\left(-\frac{1}{\eta\mu^2 x}\right)\cdot(\eta\mu x)'=\frac{3x^3}{\eta\mu x}-\frac{x^3\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$$

**Θέμα 3$^{o}$:**

**Α.** Είναι:

$$\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{3x+4}-4}{x-4}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{3x+4}-4\right)\left(\sqrt{3x+4}+4\right)}{(x-4)\left(\sqrt{3x+4}+4\right)}=$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{3x+4-16}{(x-4)\left(\sqrt{3x+4}+4\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{3x-12}{(x-4)\left(\sqrt{3x+4}+4\right)}=$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{3(x-4)}{(x-4)\left(\sqrt{3x+4}+4\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{3}{\left(\sqrt{3x+4}+4\right)}=\frac{3}{8}$$

Επίσης, είναι: $f(4)=2\alpha^2+\alpha-\frac{5}{8}$ . Για να είναι η f συνεχής στο 4 πρέπει:

$$\lim_{x\to 4} f(x)=f(4)\Leftrightarrow 2\alpha^2+\alpha-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}\Leftrightarrow 2\alpha^2+\alpha-1=0\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2+\alpha^2+\alpha-1=0\Leftrightarrow \alpha^2-1+\alpha^2+\alpha=0\Leftrightarrow$$

$$(\alpha-1)(\alpha+1)+\alpha(\alpha+1)=0\Leftrightarrow(\alpha+1)(\alpha-1+\alpha)=0\Leftrightarrow$$

$$(\alpha+1)(2\alpha-1)=0\Leftrightarrow \alpha=-1 \text{ ή } \alpha=\frac{1}{2}$$

**Β. i.** Η $f(x)=x^2-2x+2$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με :

$$f'(x)=\left(x^2-2x+2\right)'=2x-2 \text{ και } f''(x)=(2x-2)'=2,\ x\in\mathbb{R}\ .$$

**ii.** $A=f'(3)+f''(2022)=2\cdot 3-2+2=6$

**iii.** Είναι: $f'(x)+f''(x)=2x-2+2=2x,\ x\in\mathbb{R}$ .

**Θέμα 4$^{o}$:**

**Α.** $\lim_{x\to 4}\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+12}}=\lim_{x\to 4}\frac{8x\sqrt{x-4}}{\sqrt{x^2+12}}=\frac{0}{\sqrt{28}}=0.$

**Β.** Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με :

$$g'(x)=\left(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+2022\right)'=\frac{x^2}{2}+x+1 \text{ και}$$

$g''(x)=\left(\frac{x^2}{2}+x+1\right)'=x+1$. Οπότε:

$$\frac{g'(-2)+g''(2)}{2}=\frac{2-2+1+2+1}{2}=\frac{4}{2}=2.$$

**Γ.** Είναι: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(3+h)-g(3)}{h}=g'(3)=\frac{9}{2}+4=\frac{17}{2}$.

**Δ.** Είναι: $f(20)-8g''(2)=160\sqrt{16}-8\cdot 3=160\cdot 4-24=640-24=616$