

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

30

Γ' Λυκείου(ΕΠΑ.Λ)

02-10-22

Ον/μο:.....

Υψηλός Διαφορικός Λογισμός

Θέμα 1^ο:

A. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A λέγεται συνεχής; (5 μον.)

B. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; (5 μον.)

Γ. Να αποδείξετε ότι η $f(x) = x^2$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η παράγωγός της είναι $f'(x) = 2x$. **(5 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με (Σ) Σωστό ή (Λ) Λάθος τις παρακάτω προτάσεις :

i. Η $f(x) = \eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση. **Σ Λ**

ii. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x+3}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. **Σ** **Λ**

iii. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g'(x).$ $\Sigma \quad \Lambda$

iv. Η $g(x) = x^3 + 9x - 2$ είναι συνεχής. $\Sigma \quad \Lambda$

(4x1=4 μov.)

Ε. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

i. $(\mathbf{X}^v)' = \dots\dots\dots$

ii. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots\dots\dots$$

iii. $(\varepsilon\varphi_X)' = \dots\dots\dots$

(3x2=6 μον.)

Θέμα 2^ο:**A.** Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^4 + 1}{x + 3}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 2x}{2x^2 - 5x + 3}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 7x + 6}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{1 - \sqrt{x - 2}}$

(4x4=16 μον.)**B.** Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i. $f(x) = 3x^2 - 5\sin x$

ii. $g(x) = \sin x \cdot \sqrt{x}$

(2x2.5=5μον.)**Γ.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x) = \operatorname{erf} x \text{ είναι } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} x^2} . \quad \textbf{(4 μον.)}$$

Θέμα 3^ο:

A. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 2\alpha + 1, & x = 3 \end{cases} .$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. **(3 μον.)****ii.** Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(4)$, $f(-1)$ και $f(3)$. **(6 μον.)****iii.** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$. **(6 μον.)****iv.** Να βρείτε την τιμή του α έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στο 3. **(3 μον.)****B.** Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής και η καμπύλη της διέρχεται

από το σημείο $A(-1, 2)$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) \cdot (x^2 + x)}{2 - \sqrt{x + 5}} . \quad \textbf{(7 μον.)}$

Θέμα 4^ο:

A. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = x^2 - 5x + 6$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (3 μον.)

ii. Να βρείτε τις τιμές $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ και $\varphi(-1)$. (6 μον.)

iii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της φ με τους άξονες. (4 μον.)

iv. Αν $g(x) = x^2 + 4$, να βρείτε τις συναρτήσεις

$\varphi(x) + g(x)$ και $\frac{\varphi(x)}{g(x)}$. (5 μον.)

B. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{x-1} + \sqrt{x}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (4 μον.)

ii. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης. (3 μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (ενδεικτικές)

Θέμα 1^ο:

A. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A λέγεται συνεχής όταν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

B. Μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Γ. Είναι:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x_0h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x_0 + h)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2x_0 \end{aligned}$$

A. i. Λ ii. Λ iii. Λ iii. Σ

E. i. $(x^v)' = vx^{v-1}$.

ii. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{l_1}{l_2}, \quad l_2 \neq 0.$$

iii. $(\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$

Θέμα 2^ο:

A. i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^4 + 1}{x + 3} = \frac{2 \cdot 0^4 + 1}{0 + 3} = \frac{1}{3}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 2x}{2x^2 - 5x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x(x^2 - 1)}{2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x(x - 1)(x + 1)}{(2x - 3)(x - 1)} =$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x(x + 1)}{(2x - 3)} = \frac{2 \cdot 1 \cdot (1 + 1)}{(2 \cdot 1 - 3)} = \frac{4}{-1} = -4.$$

Όπου για το $2x^2 - 5x + 3$ έχουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1 > 0. \text{ Άρα το τριώνυμο}$$

$$\text{έχει δύο ρίζες τις } x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{5 \pm 1}{4} = \left\langle \frac{3}{2}, 1 \right\rangle.$$

iii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 7x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)(x^2 + 2x - 3)} =$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 2x + 4)}{(x^2 + 2x - 3)} = \frac{(2^2 + 2 \cdot 2 + 4)}{(2^2 + 2 \cdot 2 - 3)} = \frac{12}{5}.$$

Όπου για το $x^3 - 7x + 6$ από σήμα Horner για $\rho=2$ έχουμε:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & -7 & 6 & 2 \\ \downarrow & 2 & 4 & -6 & \\ 1 & 2 & -3 & 0 & \end{array}$$

iv. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{1 - \sqrt{x - 2}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(1 + \sqrt{x - 2})}{(1 - \sqrt{x - 2})(1 + \sqrt{x - 2})} =$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(1 + \sqrt{x - 2})}{1 - (\sqrt{x - 2})^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(1 + \sqrt{x - 2})}{1 - x + 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(1 + \sqrt{x - 2})}{3 - x} = \lim_{x \rightarrow 3} \left[- (1 + \sqrt{x - 2}) \right] = - (1 + \sqrt{3 - 2}) = -2.$$

B. i. $f'(x) = (3x^2 - 5\sin x)' = 6x + 5\eta\mu x$

ii. $g'(x) = (\sin x \cdot \sqrt{x})' = (\sin x)' \cdot \sqrt{x} + \sin x \cdot (\sqrt{x})' =$

$$-\eta\mu x \cdot \sqrt{x} + \sin x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Γ. Είναι:

$$f'(x) = (\varepsilon\phi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \right)' = \frac{(\eta\mu x)' \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \cdot (\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \cdot (-\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Θέμα 3^ο:

A. Έχουμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & , x \neq 3 \\ 2\alpha + 1 & , x = 3 \end{cases}$.

i. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $A = \mathbb{R}$.

ii. $f(0) = \frac{0^2 - 9}{0 - 3} = 3$

$f(4) = \frac{4^2 - 9}{4 - 3} = \frac{16 - 9}{1} = 7$

$f(-1) = \frac{(-1)^2 - 9}{-1 - 3} = \frac{1 - 9}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2$

$f(3) = 2\alpha + 1$

iii. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9 \left(\frac{0}{0} \right)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6$.

iv. Για να είναι η f συνεχής στο 3 πρέπει $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \Leftrightarrow$

$$2\alpha + 1 = 6 \Leftrightarrow 2\alpha = 6 - 1 \Leftrightarrow 2\alpha = 5 \Leftrightarrow \alpha = \frac{5}{2}.$$

B. Εφόσον η συνάρτηση f είναι συνεχής και η καμπύλη της διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$ θα είναι $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = 2$. Τότε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) \cdot (x^2 + x) \left(\frac{0}{0} \right)}{2 - \sqrt{x+5}} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) \cdot x(x+1)(2 + \sqrt{x+5})}{(2 - \sqrt{x+5})(2 - \sqrt{x+5})} = \\ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) \cdot x(x+1)(2 + \sqrt{x+5})}{2^2 - (\sqrt{x+5})^2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) \cdot x(x+1)(2 + \sqrt{x+5})}{4 - x - 5} = \\ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) \cdot x(x+1)(2 + \sqrt{x+5})}{-x - 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) \cdot x(x+1)(2 + \sqrt{x+5})}{-(x+1)} = \\ -\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \cdot x(2 + \sqrt{x+5}) &= -2 \cdot (-1) \cdot 4 = 8. \end{aligned}$$

Θέμα 4^ο:

A. Έχουμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = x^2 - 5x + 6$.

i. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $A = \mathbb{R}$.

ii. Είναι: $\varphi(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 6$

$$\varphi(1) = 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 1 - 5 + 6 = 2$$

$$\varphi(-1) = (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + 6 = 1 + 5 + 6 = 12$$

iii. Για να τέμνει η γραφική παράσταση της φ τον άξονα $x'x$ πρέπει $y=0$ δηλαδή $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 3$. Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα $A(2,0)$ και $B(3,0)$. Για να τέμνει η γραφική παράσταση της φ τον άξονα $y'y$ πρέπει $x=0$ δηλαδή $\varphi(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 6$. Οπότε το ζητούμενο σημείο είναι το $\Gamma(0,6)$.

iv. Η $g(x) = x^2 + 4$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$. Στο κοινό πεδίο ορισμού A έχουμε:

$$\varphi(x) + g(x) = x^2 - 5x + 6 + x^2 + 4 = 2x^2 - 5x + 10$$

$$\frac{\varphi(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 4} \quad \text{όπου πρέπει } x^2 + 4 \neq 0 \text{ που ισχύει.}$$

B.i. Για να ορίζεται η $f(x) = \frac{x+2}{x-1} + \sqrt{x}$ πρέπει $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

και $x \geq 0$, οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι $A = [0,1) \cup (1,+\infty)$.

ii. Η παράγωγος της f είναι: $f'(x) = \left(\frac{x+2}{x-1} + \sqrt{x} \right)' =$

$$\frac{(x+2)'(x-1) - (x+2)(x-1)'}{(x-1)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{x-1-x-2}{(x-1)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$-\frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x \in A^*.$$