ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **119**

Β' Λυκείου

Ον/μο:………………………… **Γεν. Παιδείας**

Ύλη: Συστήματα- Μονοτονία **02-10-22**

<u>Θέμα 1ο:</u>

Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$ με $\alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$, παριστάνει ευθεία γραμμή. **(8μον.)**

Β. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ’ ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; **(7μον.)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** Σωστό ή **(Λ)** Λάθος τις παρακάτω προτάσεις :

i. Η $f(x)=5x+3$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. **Σ Λ**

ii. Αν για το σύστημα $\left.\begin{matrix}\alpha x+\beta y=\gamma\\ \alpha' x+\beta' y=\gamma'\end{matrix}\right\}$ ισχύει ότι $D=0$, τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. **Σ Λ**

iii. Το σύστημα $\begin{cases}xy=32\\ x+y=12\end{cases}$ έχει μοναδική λύση. **Σ Λ**

iv. Η $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$ έχει πεδίο ορισμού το $[2,3]$. **Σ Λ**

v. Αν ένα γραμμικό σύστημα 2x2 έχει 2 λύσεις, τότε έχει άπειρο πλήθος λύσεων. **Σ Λ**

(5x2=10μον.)

<u>Θέμα 2ο:</u>

Α. Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{matrix}\dfrac{x-1}{3}+\dfrac{-y+3}{6}=1\\ -\dfrac{x+3}{3}+\dfrac{2x+y}{4}=\dfrac{y-3}{3}\end{matrix}\right\}$. **(7μον.)**

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3x^5-\dfrac{2}{x}$.

i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $\Delta=(0,+\infty)$. **(6 μον.)**

ii. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(\sqrt{3})$ και $f(\sqrt[3]{5})$. **(4 μον.)**

iii. Να βρείτε την τιμή $f(1)$ και στη συνέχεια, να λύσετε την εξίσωση $f(x)-1=0$ στο $(0,+\infty)$. **(2 μον.)**

Γ. Να λύσετε το σύστημα: $\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+2y-3z=2 \\ 2x+3y-2z=3 \end{array}\right\}$. **(6 μον.)**

<u>Θέμα 3ο:</u>

Α. Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{array}{l} x+y=6 \\ y+z=-4 \\ z+x=20 \end{array}\right\}$. **(8μον.)**

Β. Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{array}{l} x+y=7 \\ x\cdot y=10 \end{array}\right\}$.

Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα . **(7μον.)**

Γ. Για τις ορίζουσες D, D_x, D_y, ενός γραμμικού συστήματος 2x2 ισχύει ότι: $D^2+4D_x^2+D_y^2=8D-12D_x+2D_y-26$.Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση και στη συνέχεια να τη βρείτε. **(10 μον.)**

<u>Θέμα 4ο:</u>

Α. Να βρεθεί ένας τριψήφιος φυσικός αριθμός αν :

* Το άθροισμα των ψηφίων του είναι 21.

* Ο αριθμός ελαττώνεται κατά 9,στην περίπτωση που αλλάξει η θέση των δύο τελευταίων ψηφίων του.

* Ο αριθμός ελαττώνεται κατά 90,στην περίπτωση που αλλάξει η θέση των δύο πρώτων ψηφίων του. **(10μον.)**

Β. Να βρεθεί η τιμή του $\mu\in\mathbb{R}$ για την οποία το σύστημα

$(\Sigma)\ \left.\begin{array}{l} (\mu-1)x-2y=\mu \\ 6x-(\mu-2)y=4 \end{array}\right\}$ είναι αδύνατο. **(15μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1ο:

Α. i. $\alpha x+\beta y=\gamma$ με $\alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

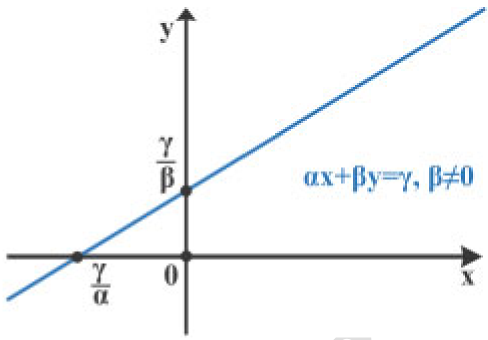
● Αν $\beta\neq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται :

$$\alpha x+\beta y=\gamma \Leftrightarrow \beta y=-\alpha x+\gamma \Leftrightarrow y=\frac{-\alpha}{\beta}x+\frac{\gamma}{\beta}$$

επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία που έχει

συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{\alpha}{\beta}$ και τέμνει τον y΄y στο $\frac{\gamma}{\beta}$.

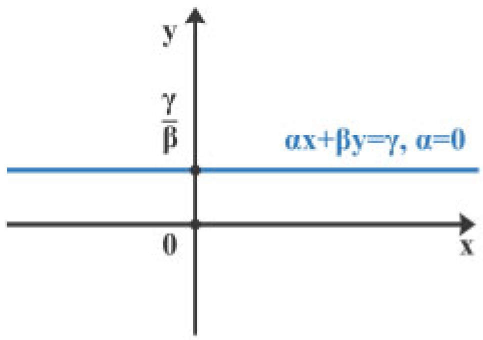
→ Αν $\alpha\neq 0$, τότε η ευθεία τέμνει και τους δύο άξονες .



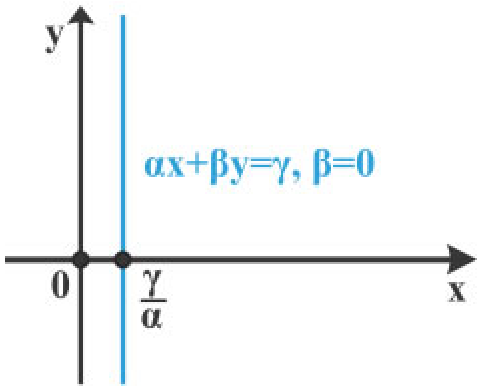
→ Αν α=0 , τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $y=\frac{\gamma}{\beta}$ και

επομένως παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον

άξονα x΄x και τέμνει τον y΄y στο $\frac{\gamma}{\beta}$.



● Αν β=0 , τότε η εξίσωση γράφεται : $\alpha x=\gamma \Leftrightarrow x=\frac{\gamma}{\alpha}$
Επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα y΄y και τέμνει τον y΄y στο $\frac{\gamma}{\alpha}$.



Β. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για κάθε $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ να ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

Γ. i.Λ **ii.**Λ **iii.** Λ **iv.**Λ **v.**Σ

<u>Θέμα 2ο:</u>

Α.Έχουμε :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{x-1}{3}+\frac{-y+3}{6}=1\\&-\frac{x+3}{3}+\frac{2x+y}{4}=\frac{y-3}{3}\end{aligned}\right\}\underset{\cdot 12}{\overset{\cdot 6}{\Leftrightarrow}}\left.\begin{aligned}&2(x-1)+(-y+3)=6\\&-4(x+3)+3(2x+y)=4(y-3)\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}&2x-2-y+3=6\\&-4x-12+6x+3y=4y-12\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}&2x-y=5\\&2x-y=0\end{aligned}\right\}$$

Το σύστημα είναι αδύνατο.

Β. i. Έστω $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1 < x_2$, τότε:

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^5 < x_2^5 \Leftrightarrow 3x_1^5 < 3x_2^5$ **(1)**

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow -\frac{2}{x_1} < -\frac{2}{x_2}$ **(2)**

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2) προκύπτει ότι: $f(x_1) < f(x_2)$.

Δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

ii. Έστω ότι $\sqrt{3} < \sqrt[3]{5}$ τότε: $\left(\sqrt{3}\right)^6 < \left(\sqrt[3]{5}\right)^6 \Leftrightarrow 3^3 < 5^2 \Leftrightarrow 27 < 25$ άτοπο.

Επομένως: $\sqrt{3} > \sqrt[3]{5} \overset{f-\text{γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow} f\left(\sqrt{3}\right) > f\left(\sqrt[3]{5}\right)$.

iii. Είναι: $f(1) = 3 - 2 = 1$ οπότε:

$$f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = f(1) \overset{f-\text{γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow} x = 1.$$

Γ. Έχουμε το σύστημα: $\left.\begin{array}{ll} x + y + z = 1 & (1) \\ x + 2y - 3z = 2 & (2) \\ 2x + 3y - 2z = 3 & (3) \end{array}\right\}$

Η (1)$\Rightarrow$ $x = 1 - y - z$ (4)

$$\left.\begin{array}{l}(2)\\(3)\end{array}\right\} \overset{(4)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{l} 1 - y - z + 2y - 3z = 2 \\ 2 - 2y - 2z + 3y - 2z = 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y - 4z = 1 \\ y - 4z = 1 \end{array}\right\}.$$

Το σύστημα των (2) και (3) έχει άπειρες λύσεις, οπότε και το αρχικό σύστημα θα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x, y, z) = (-5z, 1 + 4z, z),\ z \in \mathbb{R}$.

Θέμα 3ο:

Α. i. $\begin{cases} x+y=6 & (1) \\ y+z=-4 & (2) \\ z+x=20 & (3) \end{cases}$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) , (2) , (3) και προκύπτει :

$$2x+2y+2z=22 \overset{:2}{\Leftrightarrow} x+y+z=11 \ (4)$$

Αφαιρούμε από την (4) διαδοχικά τις (1) , (2) , (3) και έχουμε :

- (4)-(1) $\Rightarrow x+y+z-(x+y)=11-6 \Leftrightarrow z=5$
- (4)-(2) $\Rightarrow x+y+z-(y+z)=11+4 \Leftrightarrow x=15$
- (4)-(3) $\Rightarrow x+y+z-(z+x)=11-20 \Leftrightarrow y=-9$

Οπότε η λύση του συστήματος είναι (x,y,z)=(15,-9,5).

Β. Έχουμε : $\left.\begin{matrix} x+y=7 \\ x\cdot y=10 \end{matrix}\right\}$

Αναζητούμε δύο αριθμούς που έχουν άθροισμα 7 και γινόμενο 10. Επομένως , από τους τύπους του Vieta οι αριθμοί αυτοί είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\omega^2-7\omega+10=0$. Οι ρίζες της εξίσωσης είναι ω=2 ή ω=5 . Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη (2,5) ή (5,2) .

Γεωμετρικά , έχουμε ότι η ευθεία και η υπερβολή τέμνονται σε 2 σημεία .

Γ. Είναι: $D^2+4D_x^2+D_y^2=8D-12D_x+2D_y-26 \Leftrightarrow$

$$D^2+4D_x^2+D_y^2-8D+12D_x-2D_y+26=0 \Leftrightarrow$$

$$D^2-8D+16+4D_x^2+12D_x+9+D_y^2-2D_y+1=0 \Leftrightarrow$$

$$(D-4)^2+(2D_x+3)^2+(D_y-1)^2=0$$

Εφόσον $D\neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(-\frac{3}{8},\frac{1}{4}\right).$$

<u>Θέμα 4ο:</u>

Α. Έστω x, y, z τα ψηφία του αριθμού. Τότε έχουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=21 \\ 100x+10y+z-9=100x+10z+y \\ 100x+10y+z-90=100y+10x+z \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=21 \\ 9y-9z=9 \\ 90x-90y=90 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll} x+y+z=21 & (1) \\ y-z=1 & (2) \\ x-y=1 & (3) \end{array}\right\}$$

Προσθέτουμε τις (1), (2), (3) κατά μέλη και προκύπτει $2x+y=23$ (4).

$$\left.\begin{array}{l} (4) \\ (3) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+y=23 \\ x-y=1 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{l} 3x=24 \\ x-y=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=8 \\ y=7 \end{array}\right\}.$$

Για x=8 και y=7 έχουμε ότι z=6. Επομένως, ο ζητούμενος αριθμός είναι το 876.

Β. Έχουμε το σύστημα : $\left.\begin{array}{l} (\mu-1)x-2y=\mu \\ 6x-(\mu-2)y=4 \end{array}\right\}$

Θα βρούμε την ορίζουσα του συστήματος . Είναι :

$$D=\begin{vmatrix} \mu-1 & -2 \\ 6 & 2-\mu \end{vmatrix}=(\mu-1)(2-\mu)+12=-\mu^2+3\mu+10=.$$
$$-(\mu-5)(\mu+2)$$

Για να είναι το (Σ) αδύνατο πρέπει κατ' αρχάς:
$D=0 \Leftrightarrow \mu=5$ ή $\mu=-2$.

*Αν μ=5 το σύστημα γίνεται $\left.\begin{array}{l} 4x-2y=5 \\ 6x-3y=4 \end{array}\right\} \underset{:3}{\overset{:2}{\Leftrightarrow}} \left.\begin{array}{l} 2x-y=\frac{5}{2} \\ 2x-y=\frac{4}{3} \end{array}\right\}$

δηλαδή είναι αδύνατο.

*Αν μ=-2 το σύστημα γίνεται $\left.\begin{matrix}-3x-2y=-2\\ 6x+4y=4\end{matrix}\right\}\overset{\cdot(-1)}{\underset{:2}{\Leftrightarrow}}\left.\begin{matrix}3x+2y=2\\ 3x+2y=2\end{matrix}\right\}$

δηλαδή το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Επομένως το σύστημα είναι αδύνατο για μ=5.