ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

221

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη: Μέχρι παραγώγους **09-04-22**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε μία συνάρτηση f λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0; **(μον.5)**

Α2. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα Fermat. **(μον.5)**

Α3. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **(μον.5)**

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Αν μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, είναι γνησίως αύξουσα στο Α τότε ισχύει ότι $f'(x)>0$.»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. **(μον.1)**

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α). **(μον.3)**

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f είναι τα σημεία για τα οποία ισχύει $f'(x)=0$.

β) Αν $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)>0$.

γ) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα. **(μον.6)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύουν:
$f(0)=\frac{1}{2}$ και $e^x\cdot f'(x)=f(x)-f'(x),\ \forall x\in R$

B1.Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{e^x}{1+e^x},\ x\in R$. **(μον.6)**

B2.Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}. **(μον.7)**

B3.Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x))>\frac{\sqrt{e}}{1+\sqrt{e}}$. **(μον.6)**

B4.Αν $g(x)=\ln x$, να δείξετε ότι $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$. **(μον.5)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$.

Γ1.Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **(μον.6)**

Γ2.Αν είναι γνωστό ότι το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\left(-\infty,\frac{1}{2e}\right]$. **(μον.4)**

Γ3.Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in R$ ώστε η εξίσωση $f(x)=\lambda,\ x>0$ έχει ακριβώς μια λύση. **(μον.5)**

Γ4.Αν $\alpha\geq 2$ να δείξετε ότι:

α) $f(\alpha+1)<f(\alpha)$ **(μον.4)**

β) $\alpha^{(\alpha+1)^2}>(\alpha+1)^{\alpha^2}$ **(μον.6)**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.Δίνονται οι συναρτήσεις f , g : $(0,+\infty)\to R$ με f(1)=g(1)=0 και $f'(x)=-e^{g(x)}$, $g'(x)=-e^{f(x)}$ για κάθε x>0 .Να αποδείξετε ότι :

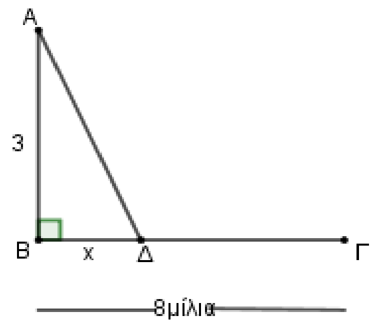
α)οι f και g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες. **(μον.4)**

β) $f=g$ **(μον.6)**

γ) η συνάρτηση $h(x)=e^{-f(x)}-x$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$. **(μον.4)**

δ) $f(x)=-\ln x, x>0$ **(μον.4)**

Δ2.Ένας ψαράς βρίσκεται με τη βάρκα του στη θέση Α και το πλησιέστερο σημείο Β της ακτής απέχει 3 ναυτικά μίλια. Στη θέση Γ και σε απόσταση 8 ναυτικών μιλίων(ν.μ.) από το Β, βρίσκεται η ιχθυόσκαλα όπου θέλει να φτάσει για να πουλήσει τα ψάρια του. Αν η βάρκα κινείται με ταχύτητα 4 ν.μ./h και ο ψαράς πεζός κινείται με ταχύτητα 5 ν.μ./h, να βρεθεί η τιμή του x για την οποία ο ψαράς χρειάζεται τον λιγότερο χρόνο για να φτάσει στην ιχθυόσκαλα.



Πόση είναι η συνολική διαδρομή τότε; **(μον.7)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχ. Βιβλίο **Α2.** Σχ. Βιβλίο **Α3.** Σχ. Βιβλίο

Α4. α) Ψ

β) Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3$. Αν και είναι γνησίως αύξουσα στο R, εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x)=3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το R, αφού $f'(0)=0$.

Ισχύει όμως $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in R$.

Α5. α) Λάθος **β)** Λάθος **γ)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι:

$$e^x\cdot f'(x)=f(x)-f'(x)\overset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow}e^{2x}\cdot f'(x)=e^xf(x)-e^xf'(x)\overset{:e^{2x}}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{e^xf'(x)-e^xf(x)}{e^{2x}}=-f'(x)\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)'=-f'(x)\Leftrightarrow\frac{f(x)}{e^x}=-f(x)+c$$

Όμως, $f(0)=\frac{1}{2}$ άρα $\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+c\Leftrightarrow c=1$ οπότε:

$$\frac{f(x)}{e^x}=-f(x)+1\Leftrightarrow f(x)=-e^xf(x)+e^x\Leftrightarrow f(x)+e^xf(x)=e^x$$

$$\Leftrightarrow f(x)\left(e^x+1\right)=e^x\Leftrightarrow f(x)=\frac{e^x}{e^x+1},\ x\in\mathbb{R}.$$

Β2. Η f είναι παραγωγίσιμη, ως πηλίκο παραγωγίσιμων με:

$$f'(x)=\frac{e^x\left(e^x+1\right)-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{1}{\left(e^x+1\right)^2}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$$, οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα, άρα 1-1 , δηλαδή αντιστρέψιμη. Το σύνολο τιμών της είναι το : $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,1)$

διότι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{0}{1} = 0 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{L-H}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

Η αντίστροφη της f θα έχει πεδίο ορισμού το $f(A) = (0,1)$.

Λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x+1} = y \Leftrightarrow e^x = ye^x + y \Leftrightarrow e^x - ye^x = y \Leftrightarrow$$

$$e^x(1-y) = y \Leftrightarrow e^x = \frac{1-y}{y} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1-y}{y}\right)$$

Και έτσι η αντίστροφη της f είναι: $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right),\ x \in (0,1)$.

B3. Είναι:

$$f(f(x)) > \frac{\sqrt{e}}{1+\sqrt{e}} \Leftrightarrow f(f(x)) > f\left(\frac{1}{2}\right) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$f(x) > f(0) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x > 0$$

B4. Είναι $g(x) = \ln x,\ x>0$. Για την fog έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} x \in A_g \\ g(x) \in A_f \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x > 0 \\ \ln x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Leftrightarrow x > 0 \text{ και τότε:}$$

$$h(x) = (fog)(x) = f(g(x)) = \frac{e^{\ln x}}{e^{\ln x}+1} = \frac{x}{x+1},\ x > 0 \ .$$

Η h είναι παραγωγίσιμη, ως ρητή πολυωνυμική με

$$h'(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x > 0 \quad \text{,άρα η h είναι}$$

γνησίως αύξουσα, οπότε αντιστρέφεται. Η αντίστροφή της, θα έχει πεδίο ορισμού το $h(A) = \left(\lim_{x\to0^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (0,1)$ και είναι:

$$h(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = y \Leftrightarrow x = xy + y \Leftrightarrow x(1-y) = y \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{y}{1-y}$$

Επομένως, $(fog)^{-1}(x)=h^{-1}(x)=\dfrac{x}{1-x}, x\in(0,1)$.

Η αντίστροφη της g είναι $g^{-1}(x)=e^{x}, x\in\mathbb{R}$. Για το Π.Ο. της $g^{-1}of^{-1}$:

$$\left.\begin{array}{l} x\in A_{f^{-1}} \\ f^{-1}(x)\in A_{g^{-1}} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x\in(0,1) \\ \ln\left(\dfrac{1-x}{x}\right)\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \Leftrightarrow x\in(0,1) \text{ και τότε:}$$

$$\left(g^{-1}of^{-1}\right)(x)=g^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)=e^{\ln\frac{x}{1-x}}=\frac{x}{1-x},\ x\in(0,1).$$

Επομένως, $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=(0,+\infty)$ και παράγωγο

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)'=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-\ln x\cdot 2x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}\ .$$

Αν $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow \dfrac{1-2\ln x}{x^3}\geq 0\Leftrightarrow 1-2\ln x\geq 0\Leftrightarrow \ln x\leq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow$

$x\leq e^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow x\leq\sqrt{e}$

Στον πίνακα φαίνονται τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f.

x	0 A_1	$\sqrt{e}$ A_2 $+\infty$
f '	+	−
f	$-\infty$ ↑	↑ 0

min=$\dfrac{1}{2e}$

Γ2. Είναι:

$$\lim_{x\Rightarrow 0^+} f(x)=\lim_{x\Rightarrow 0^+}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\Rightarrow 0^+}\left(\ln x\cdot\frac{1}{x^2}\right)=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty\,.$$

Η f είναι συνεχής με μέγιστη τιμή την $\dfrac{1}{2e}$ άρα έχει σύνολο τιμών

το A=$f(A)=\left(-\infty,\dfrac{1}{2e}\right]$.(Σκεφτείτε ένα ενδεικτικό σχήμα)

Γ3.Απ' τον πίνακα του Γ1 και το Γ2 προκύπτει ότι $\lambda = \dfrac{1}{2e},\ \lambda \le 0$..

Γ4. α)Εχουμε $\alpha \ge 2 > \sqrt{e}$ οπότε $\alpha+1>\alpha \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(\alpha+1) < f(\alpha)$.

β)Αφού $f(\alpha+1) < f(\alpha) \Leftrightarrow \dfrac{\ln(\alpha+1)}{(\alpha+1)^2} < \dfrac{\ln\alpha}{\alpha^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^2 \cdot \ln(\alpha+1) < (\alpha+1)^2 \cdot \ln\alpha \Leftrightarrow \ln(\alpha+1)^{\alpha^2} < \ln\alpha^{(\alpha+1)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha+1)^2 < \alpha^{(\alpha+1)^2}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.α)Οι f' και g' είναι παραγωγίσιμες ως σύνθεση παραγωγίσιμων αρα οι f και g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες.

β)Εχουμε: $\left.\begin{array}{l} f'(x) = -e^{g(x)}\ (1) \\ g'(x) = -e^{f(x)}\ (2) \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} f''(x) = -g'(x)\cdot e^{g(x)} = f'(x)\cdot g'(x) \\ g''(x) = -f'(x)\cdot e^{f(x)} = f'(x)\cdot g'(x) \end{array}$

Άρα $f''(x) = g''(x) \Leftrightarrow (f'(x))' = (g'(x))' \Leftrightarrow f'(x) = g'(x) + c$.

Από (1) και (2) είναι $f'(1) = -1,\ g'(1) = -1$ άρα c=0 οπότε

$f'(x)=g'(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + k \underset{k=0}{\overset{f(1)=g(1)=0}{\Longleftrightarrow}} f(x) = g(x)$.

γ)Η $h(x) = e^{-f(x)} - x$ έχει $h'(x) = -f'(x)\cdot e^{-f(x)} - 1 = -e^{-f(x)}\cdot[-e^{g(x)}] - 1 =$

$= e^{g(x)}\cdot e^{-f(x)} - 1 = e^{g(x)-f(x)} - 1 \overset{(\beta)}{=} e^0 - 1 = 0$ άρα $h(x)=\alpha,\ \alpha \in R$.

δ)Αφού $h(x) = \alpha \Leftrightarrow h(1) = \alpha \Leftrightarrow e^0 - 1 = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 0$ άρα h(x)=0 οπότε $e^{-f(x)} - x = 0 \Leftrightarrow e^{-f(x)} = x \Leftrightarrow \ln(e^{-f(x)}) = \ln x \Leftrightarrow -f(x) = \ln x$ άρα $f(x) = -\ln x,\ x>0$.

Β. Έστω ΑΔ η διαδρομή της βάρκας και ΔΓ η διαδρομή που θα κινηθεί ο ψαράς πεζός. Είναι $A\Delta = \sqrt{9+x^2}$ και ο αντίστοιχος χρόνος $\dfrac{\sqrt{9+x^2}}{4}$ και $(\Delta\Gamma) = 8 - x$ με αντίστοιχο χρόνο $\dfrac{8-x}{5}$.

Ο συνολικός χρόνος είναι :

$$t(x)=\frac{8-x}{5}+\frac{\sqrt{9+x^2}}{4}, x\in[0,8].$$

Είναι :

$$t'(x)=\frac{1}{5}(8-x)'+\frac{1}{4}\left(\sqrt{9+x^2}\right)'=-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{9+x^2}}=\frac{-4\sqrt{9+x^2}+5x}{20\sqrt{9+x^2}}.$$

Αν $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow -4\sqrt{9+x^2}+5x\geq 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{9+x^2}\leq 5x$ άρα

$16\cdot\left(9+x^2\right)\leq 25x^2 \Leftrightarrow x^2\geq 16$ άρα $x\geq 4$.

Ο πίνακας προσήμου για την t' είναι:

x	0	4	8
t΄	−	0	+
t	↘	ελ	↗

Η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στο x=4.
Η συνολική διαδρομή, ώστε να φτάσει ο ψαράς στην ιχθυόσκαλα συντομότερα είναι $(ΑΔ)+(ΔΓ)=\sqrt{9+16}+(8-4)=9$ν.μ.