ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

220

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη: Όλη **09-04-22**

ΘΕΜΑ Α:

Α1. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής. **(μον.4)**

Α2. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.
Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ; **(μον.4)**

Α3. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **(μον.5)**

Α4. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

α. Κάθε συνεχής συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)\neq f(\beta)$, παίρνει μόνο τις τιμές μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.

β. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ με $f(x)<0$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε η συνάρτηση f^2 είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

γ. Ισχύει $\left.\dfrac{dc}{dx}\right|_{x=x_0}=0$, όπου c σταθερά και $x_0\in\mathbb{R}$.

δ. Αν για μια παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, ισχύει $f'(x)=e^x\eta\mu4$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

ε. Αν $f(x)>0$, τότε ισχύει $\int_1^{\ln2} f(x)dx>0$.

(μον.10)

Α5.Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο β του Α4. **(μον.2)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}+x-2$.

Β1.Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα. **(μον.5)**

Β2.Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει ασύμπτωτες και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση. **(μον.7)**

Β3.Να βρείτε το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=0 και x=1. **(μον.6)**

Β4.Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της $f\circ f$. **(μον.7)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{\alpha x^2-x+2}{x+1}$, $x>-1$ και $\alpha\in R$.

Αν η ευθεία με εξίσωση $y=x-2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$,τότε:

Γ1.Να αποδείξετε ότι α=1. **(μον.7)**

Γ2.Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι $f(x^3)>f(x^2)$ για κάθε $x>1$. **(μον.5)**

Γ3.Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)+f(h)-3}{h}$. **(μον.6)**

Γ4.Δίνεται η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $g:[1,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει $1<g(x)<2$ για κάθε $x\geq 1$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μοναδική ρίζα x_o η οποία ανήκει στο (1,3). **(μον.7)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -x^3+\alpha x+\beta, & x\le 0 \\ \dfrac{\eta\mu x}{x}, & 0<x<\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Δ1.Να αποδείξετε ότι α=0 και β=1. **(μον.5)**

Δ2.Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. **(μον.7)**

Δ3.Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)dx<1$. **(μον.6)**

Δ4.Ενα σημείο $M(x,y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$, $0<x\le\dfrac{\pi}{2}$.Τη χρονική στιγμή t_o κατά την οποία το σημείο Μ διέρχεται από το σημείο $A\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{3}{\pi}\right)$ ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι 4 μονάδες/sec.
Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΜΟΚ τη χρονική στιγμή t_o, όπου Κ(x,0) και Ο(0,0). **(μον.7)**

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

Α1, Α2, Α3 Θεωρία

Α4. α. Λ **β.** Σ **γ.** Σ **δ.** Λ **ε.** Λ

Α5. Είναι: $x_1 < x_2 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x_2) \overset{f<0}{\Rightarrow} f^2(x_1) > f^2(x_2)$ άρα $f \searrow$.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 1$ και $f''(x) = -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$. Η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$:

•$f'(x) > 0$ στο $(0,+\infty)$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο το 0 το $f(0) = -2$.

$f''(x) < 0$ στο $(0,+\infty)$, οπότε είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$.

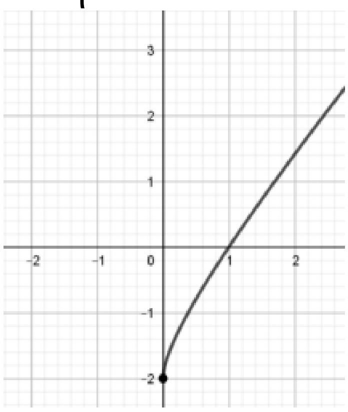
Β2. Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Επίσης: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x} + x - 2\right) = +\infty$, οπότε δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες. Επίσης:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+x-2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{x}+1-\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1-\frac{2}{x}\right) = 1$$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x} - 2\right) = +\infty$, άρα δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες. Τέμνει τον $x'x$ στο $(1,0)$ και τον $y'y$ στο $(0,-2)$.

Η γραφική της παράσταση είναι:



B3. Είναι: $0 \le x \le 1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(0) \le f(x) \le f(1) \Leftrightarrow -2 \le f(x) \le 0$, οπότε:

$$E = -\int_0^1 f(x)dx = -\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_0^1 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{6} \text{ τ.μον.}$$

B4. Για το πεδίο ορισμού της $f \circ f$ έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} x \in A_f \\ f(x) \in A_f \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x \ge 0 \\ f(x) \ge 0 \end{array}\right\} \underset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{l} x \ge 0 \\ f(x) \ge f(1) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x \ge 0 \\ x \ge 1 \end{array}\right\} \text{ οπότε}$$

$A_{fof} = [1, +\infty)$. Τότε:.

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{\sqrt{x} + x - 2} + \sqrt{x} + x - 4$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.Αφού $y = x - 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ θα είναι

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (x-2)) = 0 \text{ δηλ. } \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha x^2 - x + 2}{x+1} - x + 2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha x^2 - x + 2 - x^2 + 2x - x + 2}{x+1}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{(\alpha-1)x^2 + 4}{x+1} = 0,$$

άρα αρχικά πρέπει α=1.Τότε $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\alpha-1)x^2+4}{x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x+1} = 0$.

Αρα α=1.

Γ2.Είναι $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x+1}$ με $f'(x) = \dfrac{(2x-1)(x+1) - (x^2 - x + 2)}{(x+1)^2} =$

$= \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$, $x > -1$.Η f παρουσιάζει στο $x_o = 1$ ελάχιστο το 1.

Για x>1 έχουμε $x^3 > x^2 > 1 \xRightarrow{f\nearrow \text{στο}[1,+\infty)} f(x^3) > f(x^2)$.

Γ3. $\lim_{x\to0}\dfrac{f(1+h) + f(h) - 3}{h} = \lim_{x\to0}\dfrac{f(1+h) - 1 + f(h) - 2}{h} =$

$= \lim_{x\to0}\left(\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} + \dfrac{f(h) - f(0)}{h}\right) = f'(1) + f'(0) = 0 - 3 = -3.$

(Μπορούμε να εργαστούμε και με κανόνα de L' Hospital)

Γ4.Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x),\ x\ge 1$, η οποία είναι συνεχής και $h(1)=1-g(1)<0$ ενώ h(3)=2 – g(3)>0. Σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_o\in(1,3)$ τέτοιο ώστε $h(x_o)=0\Leftrightarrow f(x_o)=g(x_o)$. Στο $[1,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα και η $-g$ γνησίως αύξουσα, άρα και η h γνησίως αύξουσα. Συνεπώς το x_o είναι μοναδικό.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.Απ' τη συνέχεια βρίσκουμε β=1 και απ' την παραγωγισιμότητα α=0.

Δ2.Είναι $f'(x)=\begin{cases}-3x^2 & ,x\le 0\\ \dfrac{x\text{συν}x-\text{ημ}x}{x^2} & ,0<x<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\overset{=\!=\!=}{:(\text{συν}x)}\begin{cases}-3x^2\ , & x\le 0\\ \dfrac{x-\text{εφ}x}{x^2\cdot\text{συν}x}, & 0<x<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$.

Όμως $\text{εφ}x>x$ στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ άρα $f'(x)<0$ στο $\left(-\infty,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Η f λοιπόν είναι γνησίως φθίνουσα.

Δ3.Για $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow 0<\text{συν}x<1\overset{f\searrow}{\Longrightarrow}f(0)>f(\text{συν}x)\Leftrightarrow 1>\dfrac{\text{ημ}(\text{συν}x)}{\text{συν}x}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{ημ}(\text{συν}x)<\text{ημ}x$ οπότε για $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ είναι:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{ημ}(\text{συν}x)dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{συν}x dx$.

Δ4.Για $0<x\le\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow f(x)>0,\ x_M=x(t),\ y_M=\dfrac{\text{ημ}(x(t))}{x(t)}$ οπότε:

$(MOK)=\dfrac{1}{2}x_M\cdot y_M=\dfrac{1}{2}\dfrac{x(t)\text{ημ}(x(t))}{x(t)}=\dfrac{1}{2}\text{ημ}(x(t))=E(t)$, άρα

$E'(t)=\dfrac{1}{2}x'(t)\text{συν}x(t)$ και $E'(t_o)=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot\text{συν}\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$