ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

13

Ον/μο:……………….. **Γ’ Λυκείου(ΕΠΑ.Λ)**

Ύλη: Όλη η ύλη **20-03-16**

Θέμα 1ο:

Α. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, λέγεται παραγωγίσιμη στο $x_0 \in A$; **(6 μον.)**

Β. Έστω ένα δείγμα ν παρατηρήσεων που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά. Τι ονομάζουμε διάμεσο των παρατηρήσεων αυτών; **(5 μον.)**

Γ. Έστω δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις f και g με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α. Να αποδείξετε ότι:

$$\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)$$ **(5 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σ**ωστό ή **(Λ) Λ**άθος τις παρακάτω προτάσεις :

i. Η διάμεσος είναι ένα μέτρο διασποράς. **Σ Λ**

ii. $\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g'(x)$. **Σ Λ**

iii. Το εύρος ως μέτρο διασποράς έχει το μειονέκτημα ότι επηρεάζεται μόνο από τις ακραίες παρατηρήσεις. **Σ Λ**

(3x2=6 μον.)

Ε. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

i. Ο τύπος του συντελεστή μεταβλητότητας μιας κατανομής είναι CV=………… .

ii. Η αθροιστική συχνότητα εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι ………………. ή ίσες της τιμής x_i.

iii. $\left(\sqrt{x^2+2}\right)'=$ ....

(3x1=3 μον.)

Θέμα 2ο:

Οι χρόνοι αναμονής σε λεπτά 20 μαθητών στη στάση λεωφορείων για να πάνε στο σχολείο φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Χρόνος	Μαθητές	x_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$
$[1,3)$	6				
$[3,5)$					
$[5,7)$	4				
$[7,9)$	2				
Σύνολο					

Α. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε. **(5 μον.)**

Β. Να βρείτε πόσοι μαθητές περιμένουν τουλάχιστον 3 λεπτά στη στάση. **(3 μον.)**

Γ. Να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων. **(7 μον.)**

Δ. Να βρείτε τη διάμεσο των παρατηρήσεων. **(5 μον.)**

Ε. Να βρείτε την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων. **(5 μον.)**

Θέμα 3ο:

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}-7, & x\neq 2 \\ \dfrac{\alpha x^2}{4}-2\alpha^2, & x=2 \end{cases}$,

όπου α αρνητικός αριθμός.

i. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$. **(7 μον.)**

ii. Να βρείτε το α, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=2$. **(6 μον.)**

Β1. Οι βαθμοί που έγραψαν οι μαθητές μιας τάξης σε ένα διαγώνισμα έχουν διάμεσο 16 και τυπική απόκλιση 1. Υποθέτοντας ότι έχουμε περίπου κανονική κατανομή, να βρείτε κατά προσέγγιση το ποσοστό των μαθητών που έχει βαθμό:

i. Κάτω από 15 **ii.** Πάνω από 18

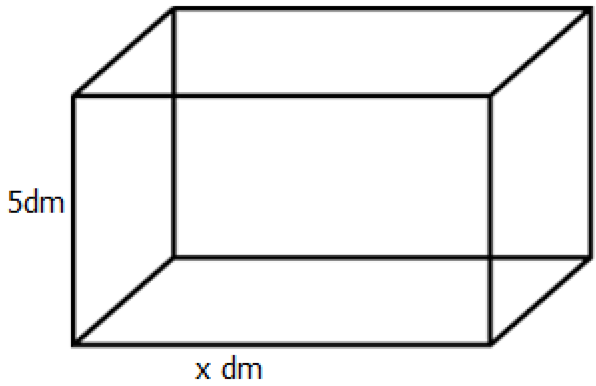
iii. Από 14 έως 17 **iv.** Το πολύ 17

(4x2=8 μον.)

Β2. Να βρείτε το συντελεστή μεταβολής του δείγματος και να εξετάσετε, αν το δείγμα είναι ομοιογενές. **(4 μον.)**

Θέμα 4ο:

Α. Θεωρούμε ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση ορθογώνιο και ανοιχτό από πάνω.



Το ύψος του κουτιού 5dm. Η βάση του κουτιού έχει σταθερή περίμετρο 20dm και μία πλευρά της είναι x dm με $0<x<10$.

i. Να αποδείξετε ότι συνολική επιφάνεια του κουτιού ως συνάρτηση του x είναι $E(x) = -x^2 + 10x + 100, x \in (0,10)$. **(4 μον.)**

ii. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας E(x) του κουτιού. **(3 μον.)**

iii. Να βρείτε για ποια τιμή του x το κουτί έχει μέγιστη επιφάνεια. **(6 μον.)**

Β. Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται η χρηματική παροχή από τους γονείς σε Ευρώ, δείγματος έξι μαθητών της πρώτης τάξης (Ομάδα Α) και έξι μαθητών της δεύτερης τάξης (Ομάδα Β) ενός Γυμνασίου.

Ομάδα Α	1	8	9	5	3	4
Ομάδα Β	7	14	6	4	12	5

i. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων κάθε ομάδας. **(4 μον.)**

ii. Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες. **(4 μον.)**

iii. Αν κάθε παρατήρηση της ομάδας Α διπλασιαστεί και κάθε παρατήρηση της ομάδας Β αυξηθεί κατά 5€ , πως διαμορφώνονται οι νέες μέσες τιμές των δύο ομάδων; **(4 μον.)**

Δίνεται: $s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\Sigma x_i{}^2\nu_i - \frac{(\Sigma x_i\nu_i)^2}{\nu}\right\}$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (ενδεικτικές)

Θέμα 1ο:

Α. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, λέγεται παραγωγίσιμη στο $x_0 \in A$ όταν το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Β. Για τη διάμεσο ενός συνόλου ν παρατηρήσεων που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά έχουμε:

→ Αν ν άρτιος τότε η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.

→ Αν ν περιττός, τότε η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση.

Γ. Έστω η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$.

Τότε $F'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}\right]=$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}\right]=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\overset{f,g\ \text{παραγωγίσιμες}}{=}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]+\lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]=$$

$$=f'(x)+g'(x)$$

Δ. i. Λ **ii.** Λ **iii.** Σ

Ε. i. Ο τύπος του συντελεστή μεταβλητότητας μιας κατανομής είναι $CV=\dfrac{s}{\left|\overline{x}\right|}$, $\overline{x}\neq 0$.

ii. Η αθροιστική συχνότητα εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι **μικρότερες** ή ίσες της τιμής x_i .

iii. $\left(\sqrt{x^2+2}\right)'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$.

Θέμα 2ο:

Α.

Χρόνος	**Μαθητές**	x_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$	$x_i\nu_i$	x_i^2	$x_i^2\nu_i$
$[1,3)$	6	2	6	30	30	12	4	24
$[3,5)$	8	4	14	40	70	32	16	128
$[5,7)$	4	6	18	20	90	24	36	144
$[7,9)$	2	8	20	10	100	16	64	128
Σύνολο	**20**	-	-	**100**	-	**84**	-	**424**

Είναι: $\nu=20$ άρα $\nu_2=20-(6+4+2)=8$

$$f_i=\frac{\nu_i}{\nu},\ f_i\%=\frac{\nu_i}{\nu}\cdot 100$$

$$N_1=\nu_1,\ N_2=N_1+\nu_2\ \text{κ.ο.κ.}$$

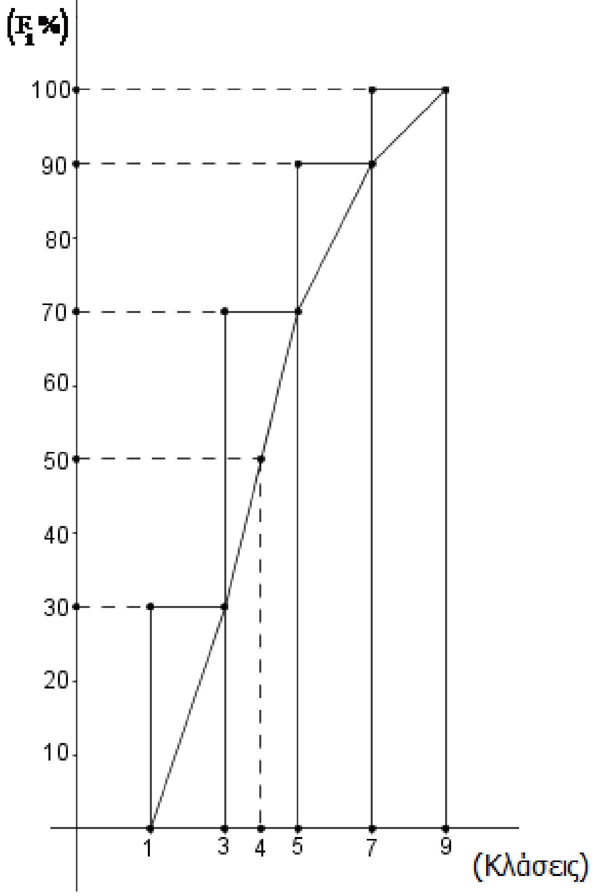
$$F_1=f_1,\ F_2=F_1+f_2\ \text{κ.ο.κ.}$$

$$F_i\%=F_i\cdot 100.$$

Β. Οι μαθητές που περιμένουν στη στάση τουλάχιστον 3 λεπτά είναι: $\nu-\nu_1=20-6=14$.

Γ. Για τη μέση τιμή έχουμε $\bar{x}=\dfrac{\Sigma x_i\nu_i}{\nu}=\dfrac{84}{20}=4,2$.

Δ. Για τη διάμεσο κατασκευάζουμε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.



Άρα η διάμεσος είναι δ=4.

Ε. Η διακύμανση είναι:

$$s^2 = \frac{1}{v}\left\{\Sigma x_i{}^2 v_i - \frac{\left(\Sigma x_i v_i\right)^2}{v}\right\} = \frac{1}{20}\left(424 - \frac{84^2}{20}\right) = \frac{424}{20} - \frac{84^2}{20^2} =$$

$$21,2 - 17,64 = 3,56.$$

Οπότε η τυπική απόκλιση είναι: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{3,56}$.

<u>Θέμα 3^ο</u>:

Α.i. $$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} - 7\right) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} - 7\right) =$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2 - 2^2} - 7\right) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x+2-4} - 7\right) =$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x-2} - 7\right) = \lim_{x\to 2}\left(\left(\sqrt{x+2}+2\right) - 7\right) = 2+2-7 = -3$$

ii. Για να είναι η f συνεχής στο 2 πρέπει:

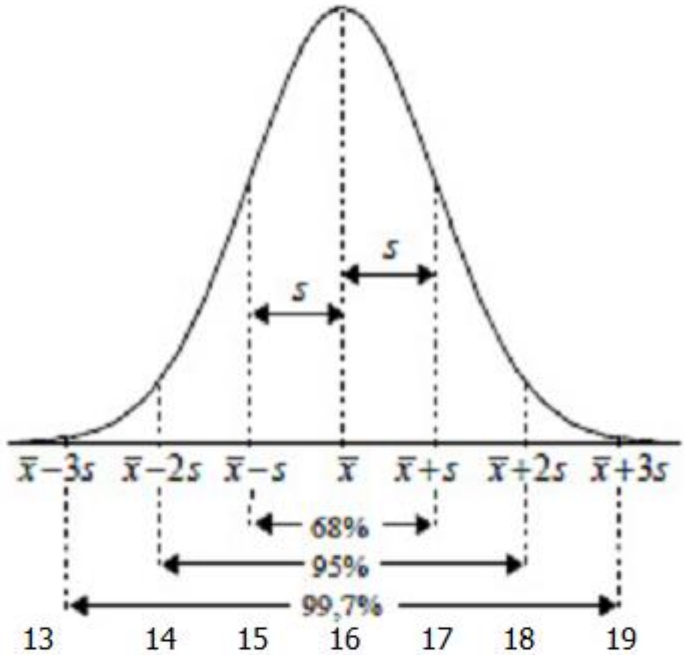
$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \frac{\alpha\cdot 2^2}{4} - 2\alpha^2 = -3 \Leftrightarrow 2\alpha^2 - \alpha - 3 = 0.$$

Η εξίσωση έχει Δ=1+24=25>0, άρα έχει δύο άνισες ρίζες τις:

$$\alpha_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1\pm 5}{4} = \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{3}{2} \\ \alpha_2 = -1 \end{cases}$$. Όμως το α είναι αρνητικός,

οπότε α=-1.

Β1. Η κατανομή είναι περίπου κανονική οπότε έχουμε $\bar{x} = \delta = 16$ και s=1.



i. Το ποσοστό των μαθητών που έχει βαθμό κάτω από 15 είναι:

$$\frac{100\% - 68\%}{2} = \frac{32\%}{2} = 16\%.$$

ii. Το ποσοστό των μαθητών που έχει βαθμό πάνω από 18 είναι:

$$\frac{100\% - 95\%}{2} = \frac{5\%}{2} = 2{,}5\%.$$

iii. Το ποσοστό των μαθητών που έχει βαθμό από 14 έως 17 είναι:

$$68\% + \frac{95\% - 68\%}{2} = 68\% + \frac{27\%}{2} = 68\% + 13{,}5\% = 81{,}5\%.$$

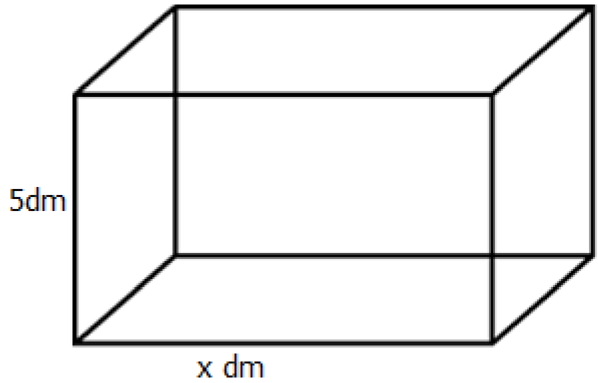
iv. Το ποσοστό των μαθητών που έχει βαθμό το πολύ 17 είναι:

$$50\% + \frac{68\%}{2} = 50\% + 34\% = 84\%.$$

Β2. Είναι $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{1}{16} < 10\%$, άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

<u>Θέμα 4º</u>:

Α.i.



Έστω x το μήκος της βάσης του παραλληλεπιπέδου και y το πλάτος του. Τότε: $\Pi = 20 \Leftrightarrow 2x + 2y = 20 \Leftrightarrow x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$.

Άρα, $E(x) = x(10-x) + 2\cdot 5x + 2\cdot 5(10-x) =$

$$10x - x^2 + 10x + 100 - 10x = -x^2 + 10x + 100,\ x \in (0,10).$$

ii. Ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειας του κουτιού είναι:

$E'(x) = \left(-x^2 + 10x + 100\right)' = -2x + 10,\ x \in (0,10).$

iii. Λύνουμε την εξίσωση:

$E'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 10 = 0 \Leftrightarrow -2x = -10 \Leftrightarrow x = 5$.

Ο πίνακας προσήμων της Ε΄ είναι:

x	0	5	10
f'	+	-	
f	↗	↘	

Ο.Μ.

Το κουτί έχει μέγιστη επιφάνεια όταν το μήκος του είναι x=5dm.

Β. i. Για την ομάδα Α έχουμε $\bar{x}_A = \dfrac{1+8+9+5+3+4}{6} = \dfrac{30}{6} = 5$ και τις τοποθετούμε σε αύξουσα σειρά: 1, 3, 4, 5, 8, 9 οπότε:

$\delta_A = \dfrac{4+5}{2} = 4{,}5$.

Για την ομάδα Β έχουμε $\bar{x}_B = \dfrac{7+14+6+4+12+5}{6} = \dfrac{48}{6} = 8$ και τις τοποθετούμε σε αύξουσα σειρά: 4, 5, 6, 7, 12, 14 οπότε:

$\delta_B = \dfrac{6+7}{2} = 6{,}5$.

ii. Για την ομάδα Α είναι:

$$s^2_A = \frac{\Sigma\left(t_i - \overline{x}\right)^2}{\nu} =$$

$$\frac{(1-5)^2+(8-5)^2+(9-5)^2+(5-5)^2+(3-5)^2+(4-5)^2}{6} =$$

$$\frac{16+9+16+0+4+1}{6} = \frac{46}{6} \simeq 7,6.$$

Οπότε $s_A = \sqrt{7,6}$ και $CV_A = \dfrac{s_A}{\left|\overline{x}_A\right|} = \dfrac{\sqrt{7,6}}{5}$.

Για την ομάδα Β είναι:

$$s^2_B = \frac{\Sigma\left(t_i - \overline{x}\right)^2}{\nu} =$$

$$\frac{(7-8)^2+(14-8)^2+(6-8)^2+(4-8)^2+(12-8)^2+(5-8)^2}{6} =$$

$$\frac{1+36+4+16+16+9}{6} = \frac{82}{6} \simeq 13,6.$$

Οπότε $s_B = \sqrt{13,6}$ και $CV_B = \dfrac{s_B}{\left|\overline{x}_B\right|} = \dfrac{\sqrt{13,6}}{8}$.

Έστω ότι το δείγμα Α είναι πιο ομοιογενές από το δείγμα Β. Τότε:

$$CV_A < CV_B \Leftrightarrow (CV_A)^2 < (CV_B)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{7,6}}{5}\right)^2 < \left(\frac{\sqrt{13,6}}{8}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{7,6}{25} < \frac{13,6}{64} \Leftrightarrow 7,6 \cdot 64 < 25 \cdot 13,6 \Leftrightarrow 486,4 < 340 \text{ άτοπο.}$$

Επομένως το δείγμα Β είναι πιο ομοιογενές από το δείγμα Α.

ii. Είναι: $\overline{x}_A{}' = 2\overline{x}_A = 2 \cdot 5 = 10.$

$\overline{x}_B{}' = \overline{x}_B + 5 = 8 + 5 = 13.$