ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 118

Β' Λυκείου

Ον/μο:………………………. Γεν. Παιδείας

Ύλη: Όλη η ύλη 09-04-22

<u>Θέμα 1^{o}:</u>

Α. i. Να αποδείξετε ότι ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το x-ρ, αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου. **(8 μον.)**

ii. Τι ονομάζουμε $\log_{\alpha}\theta$ με $0<\alpha\neq 1$ και $\theta>0$; **(7 μον.)**

Β. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Αν δύο πολυώνυμα έχουν ίδιες ρίζες, τότε είναι ίσα. **Σ Λ**

ii. Αν ο ακέραιος ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0 του πολυωνύμου $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$, τότε είναι και ρίζα του $P(x)$. **Σ Λ**

iii. Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$. **Σ Λ**

iv. Η εξίσωση $\varepsilon\varphi x=4$ είναι αδύνατη. **Σ Λ**

v. Ισχύει ότι $\log_\alpha \alpha^x=x,\ \alpha>0$. **Σ Λ**

(5x2=10μον.)

<u>Θέμα 2^{o}:</u>

Δίνεται η παράσταση: $A=\dfrac{\varepsilon\varphi(\pi-x)\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi+x)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{9\pi}{2}+x\right)}{\eta\mu(13\pi+x)\cdot\sigma\upsilon\nu(-x)\cdot\sigma\varphi\left(\dfrac{21\pi}{2}+x\right)}$

και η συνάρτηση $f(x)=(A+5)\eta\mu 2x,\ x\in\mathbb{R}$.

Α. Να αποδειχθεί ότι η τιμή της παράστασης Α ισούται με 1. **(7 μον.)**

Β. Να βρείτε την περίοδο και τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης f. **(5 μον.)**

Γ. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0,2\pi]$. **(6 μον.)**

Δ. Να λυθεί η εξίσωση : $f(x)=3,\ x\in[-\pi,\pi]$. **(7 μον.)**

Θέμα 3ο:

Έστω το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3-x^2-5x-\beta+1$ με $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$.

Αν γνωρίζουμε ότι το πολυώνυμο $Q(x)=x^2-x-2$ είναι παράγοντας του $P(x)$:

Α. Να αποδείξετε ότι α=2 και β=3. **(9 μον.)**

Β. Για α=2 και β=3 να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(1-x^2)$ και να γράψετε την ταυτότητα της αντίστοιχης διαίρεσης. **(8 μον.)**

Γ. Να λύσετε την ανίσωση: $P(x)+3(x+1)\le 0$. **(8 μον.)**

Θέμα 4ο:

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x-28$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$.

Α. Να βρεθούν οι τιμές των α και β, ώστε το $P(x)$ να έχει ρίζα τον μεγαλύτερο μονοψήφιο πρώτο αριθμό και άθροισμα συντελεστών μηδέν. **(5 μον.)**

Β. Για α=-12 και β=39:

i. Να βρεθούν οι ρίζες x_1,x_2 και x_3 ,με $x_1<x_2<x_3$, της εξίσωσης $P(x)$=0 και να αποδειχθεί ότι: $e^{2x_2}=e^{x_1}\cdot e^{x_3}$. **(8 μον.)**

ii. Να λυθεί η εξίσωση $P(\sigma\upsilon\nu x)=0$ στο διάστημα $[0,4\pi]$. **(6 μον.)**

Γ. Να λυθεί η εξίσωση: $2^{3x+1}-7\cdot 4^x-3\cdot 2^x=2^{x+1}-4$. **(6 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1ο:

Α.i. Σχ.Βιβλίο

ii. Σχ.Βιβλίο

Β. **i.**Λ **ii.**Λ **iii.** Σ **iv.**Λ **v.**Σ

Θέμα 2ο:

Α. Είναι:

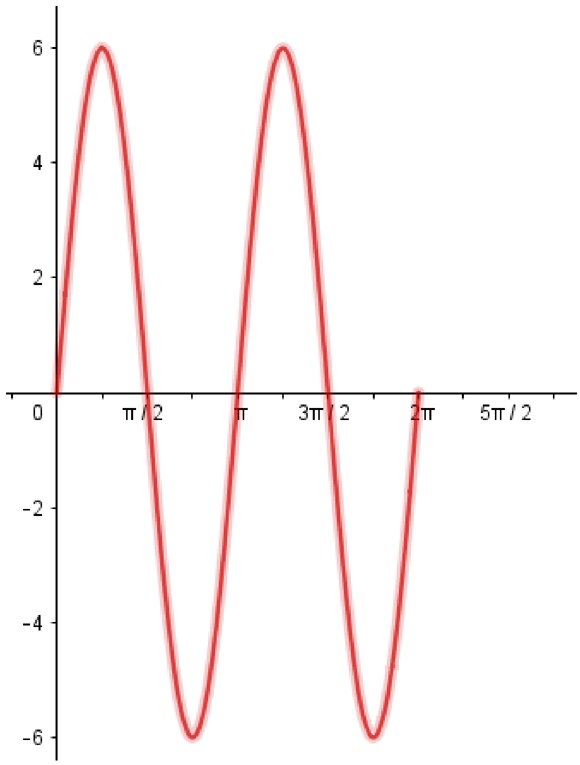
$$A=\frac{\varepsilon\varphi(\pi-x)\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi+x)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2}+x\right)}{\eta\mu(13\pi+x)\cdot\sigma\upsilon\nu(-x)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{21\pi}{2}+x\right)}$$

$$A=\frac{-\varepsilon\varphi x\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot(-\eta\mu x)}{-\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot(-\varepsilon\varphi x)}=1$$

Β. Είναι: $f(x)=(A+5)\eta\mu 2x=6\eta\mu 2x,\ x\in\mathbb{R}$.

Όπου $-1\le\eta\mu 2x\le 1\overset{\cdot 6}{\Leftrightarrow}-6\le 6\eta\mu 2x\le 6\Leftrightarrow -6\le f(x)\le 6$, δηλαδή Η f έχει ελάχιστη τιμή το -6 και μέγιστη το 6. Επίσης, έχει περίοδο $T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

Γ. Η γραφική της παράσταση είναι:



Δ. Είναι:

$$f(x)=3 \Leftrightarrow 6\eta\mu 2x=3 \Leftrightarrow \eta\mu 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu 2x=\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{6} \\ 2x=2\kappa\pi+\dfrac{5\pi}{6} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{12} \\ x=\kappa\pi+\dfrac{5\pi}{12} \end{array}\right\}$$

Όμως $x\in[-\pi,\pi]$ οπότε:

Για κ=0 είναι: $x=\frac{\pi}{12}$ ή $x=\frac{5\pi}{12}$

Για κ=1 είναι: $x=\pi+\frac{\pi}{12}$ απορ. ή $x=\pi+\frac{5\pi}{12}$ απορ.

Για κ=-1 είναι: $x=-\pi+\frac{\pi}{12}=-\frac{11\pi}{12}$ ή $x=-\pi+\frac{5\pi}{12}=-\frac{7\pi}{12}$.

<u>Θέμα 3ο:</u>

Α. Εφόσον το πολυώνυμο $Q(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$ είναι παράγοντας του $P(x)$ θα είναι:

$$\left.\begin{array}{l} P(-1)=0 \\ P(2)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -\alpha-1+5-\beta+1=0 \\ 8\alpha-4-10-\beta+1=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha+\beta=5 \\ 8\alpha-\beta=13 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \alpha=2 \\ \beta=3 \end{array}\right)$$

Β. Για α=2 και β=3 η διαίρεση $P(x):(1-x^2)$ είναι:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-x^2-5x-2 & -x^2+1 \\ \underline{-2x^3\qquad +2x} & -2x+1 \\ \quad -x^2-3x-2 & \\ \quad \underline{\;\; x^2 \qquad -1} & \\ \qquad -3x-3 & \end{array}$$

και η ταυτότητα της διαίρεσης είναι: $P(x)=(1-x^2)(-2x+1)-3x-3$.

Γ. Έχουμε:

$$P(x)+3(x+1)\le 0 \Leftrightarrow (1-x^2)(-2x+1)-3x-3+3(x+1)\le 0 \Leftrightarrow$$

$$(1-x^2)(-2x+1)\le 0 \;(1)$$

Ο πίνακας προσήμων είναι:

	$-\infty$		-1		$1/2$		1		$+\infty$
$-x^2+1$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$-2x+1$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Οπότε η $(1) \Rightarrow x \in (-\infty,-1] \cup \left[\frac{1}{2},1\right]$.

<u>Θέμα 4ο:</u>

Α. Ο μεγαλύτερος μονοψήφιος πρώτος αριθμός είναι το 7. Τότε:

$$\left.\begin{matrix} P(7)=0 \\ P(1)=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 343+49\alpha+7\beta-28=0 \\ 1+\alpha+\beta-28=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 49\alpha+7\beta=-315 \\ \alpha+\beta=27 \end{matrix}\right\} \overset{:(-7)}{\Leftrightarrow}$$

$$\left.\begin{matrix} -7\alpha-\beta=45 \\ \alpha+\beta=27 \end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{matrix} -6\alpha=72 \\ \alpha+\beta=27 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha=-12 \\ \beta=39 \end{pmatrix}.$$

Β.i. Για α=-12, και β=39 είναι $P(x)=x^3-12x^2+39x-28$.

Λύνουμε την εξίσωση $P(x)=0 \Leftrightarrow x^3-12x^2+39x-28=0$ (1).

Από σχήμα Horner για ρ=1 έχουμε:

1	-12	39	-28	1
↓	1	-11	28	
1	-11	28	0	

Τότε η (1) : $(x-1)(x^2-11x+28)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=4$ ή $x=7$.

Εφόσον $x_1<x_2<x_3$ και 1<4<7 θα είναι $x_1=1,\ x_2=4$ και $x_3=7$.

Είναι $e^{2x_2}=e^{x_1}\cdot e^{x_3} \Leftrightarrow e^{2\cdot 4}=e^1\cdot e^7 \Leftrightarrow e^8=e^8$ που ισχύει.

ii. $P(\sigma\upsilon\nu x)=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=1$ ή $\sigma\upsilon\nu x=4$ απορ. ή $\sigma\upsilon\nu x=7$ απορ.

Δηλαδή, $\sigma\upsilon\nu x=1 \Leftrightarrow x=2\kappa\pi, \kappa\in\mathbb{Z}$. Όμως $x\in[0,4\pi]$ άρα

$0\le x\le 4\pi \Leftrightarrow 0\le 2\kappa\pi\le 4\pi \overset{:2\pi}{\Leftrightarrow} 0\le\kappa\le 2$ και εφόσον ο κ είναι ακέραιος αριθμός οπότε κ=0 ή 1 ή 2.

Για κ=0 είναι x=0, για κ=1 είναι x=2π και για κ=2 είναι x=4π.

Γ.

$$2^{3x+1}-7\cdot 4^x-3\cdot 2^x=2^{x+1}-4\Leftrightarrow 2^{3x}\cdot 2-7\cdot 2^{2x}-3\cdot 2^x=2^x\cdot 2-4\overset{2^x=\omega}{\Leftrightarrow}$$

$2\omega^3-7\omega^2-5\omega+4=0$ (1).

Πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης σύμφωνα με το θεώρημα των ακέραιων ριζών είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου δηλαδή $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

Από σχήμα Horner για ρ=-1 έχουμε:

2	-7	-5	4	-1
↓	-2	9	-4	
2	-9	4	0	

Τότε η (1): $(\omega+1)(2\omega^2-9\omega+4)=0\Leftrightarrow$

$\omega+1=0\Leftrightarrow\omega=-1\Leftrightarrow 2^x=-1$ αδύνατη.

ή

$2\omega^2-9\omega+4=0$, όπου Δ=49>0, άρα η εξίσωση έχει 2 άνισες λύσεις

τις $\omega_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{9\pm 7}{4}=\left\langle \begin{matrix}\omega_1=\dfrac{1}{2}\\ \omega_2=4\end{matrix}\right.$. Οποτε:

$2^x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=-1$ ή $2^x=4\Leftrightarrow x=2.$