ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **13**

Β' Λυκείου

Ον/μο:……………………… **ΕΠΑ.Λ.**

Ύλη: Συστήματα –Ιδιότητες Συναρτήσεων- Τριγωνομετρία **05-02-22**

Θέμα 1ο:

Α.i. Τι ονομάζουμε πολυώνυμο του x; **(4 μον.)**

ii. Πότε μία συνάρτηση f ονομάζεται άρτια σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; **(5 μον.)**

iii. Να κατασκευάσετε ένα πινακάκι με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. **(6 μον.)**

Β. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** **Σωστό** ή **(Λ)** **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Η εξίσωση $2x - 4y^2 = 9$ είναι γραμμική. **Σ Λ**

ii. Το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x) = x^2 - 3x + 2$. **Σ Λ**

iii. $\eta\mu\left(5\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. **Σ Λ**

iv. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 > x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$. **Σ Λ**

v. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(A = 90^\circ\right)$ ισχύει ότι

$\eta\mu B = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$. **Σ Λ**

(5x2=10 μον.)

Θέμα 2ο: Δίνεται το σύστημα: $\left.\begin{aligned} x + 2y &= 9 \\ 3x - 7y &= 1 \end{aligned}\right\}$.

Α. Να λύσετε γραφικά το σύστημα. **(7 μον.)**

Β. Να λύσετε το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης. **(5 μον.)**

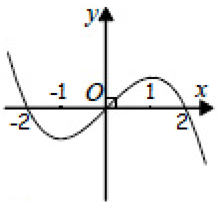
Γ. Να λύσετε το σύστημα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών. **(6 μον.)**

Δ. Να λύσετε το σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών. **(7 μον.)**

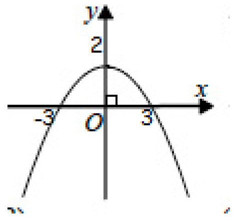
Θέμα 3ο:

Α. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τις συμμετρίες.

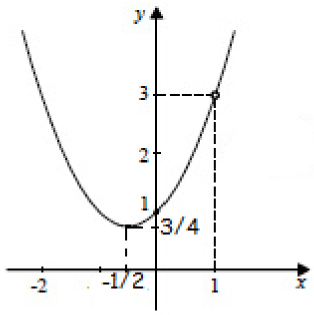
i.



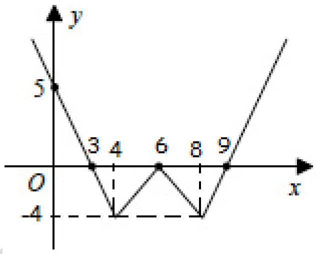
ii.



iii.



iv.



(4x3=12 μον.)

Β. Να παραστήσετε γραφικά σε ένα σύστημα συντεταγμένων, τις συναρτήσεις:

$\varphi(x)=|x|$, $f(x)=|x|+2$, $g(x)=|x-3|$ **(3 μον.)**

Γ.i. Να βρείτε τα κ, λ, μ , ώστε τα πολυώνυμα

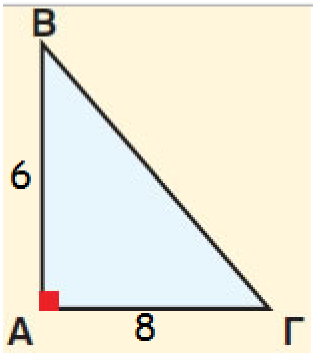
$P(x)=(\kappa-1)x^3-3x-\mu$ και $Q(x)=(\lambda-\mu)x+\mu-1$,

να είναι ίσα.

ii. Για κ=1 , $\lambda=-\dfrac{5}{2}$ και $\mu=\dfrac{1}{2}$ να βρείτε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $P(x)$ για x=0. **(2x5=10 μον.)**

Θέμα 4ο:

Α. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών Β και Γ του παρακάτω σχήματος.



(5 μον.)

Β. Να απλοποιήσετε την παράσταση :

$$A=\frac{\varepsilon\varphi(5\pi-\theta)\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{9\pi}{2}+\theta\right)\cdot\eta\mu\left(2017\pi+\theta\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{15\pi}{2}-\theta\right)\cdot\sigma\varphi(-\theta)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{23\pi}{2}+\theta\right)}.$$

(5 μον.)

Γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f\left(x\right)=\sigma\upsilon\nu x$. **(7 μον.)**

Δ. i. Να κάνετε τη διαίρεση $\left(3x^3+6x^2-17x+20\right):\left(x+3\right)$ και να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

ii. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης: $\left(-x^3+75x-250\right):\left(x+10\right)$.

(2x4=8 μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1ο:

Α. i. Πολυώνυμο του x λέγεται κάθε παράσταση της μορφής
$P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$, όπου
$\alpha_\nu,\alpha_{\nu-1},\ldots,\alpha_1,\alpha_0\in\mathbb{R}$ και $\nu\in\mathbb{N}^*$.

ii. Μία συνάρτηση f λέγεται άρτια σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για κάθε $x\in\Delta$ το $-x\in\Delta$, και ισχύει ισχύει ότι $f(-x)=f(x)$.

iii.

Γωνία ω		Τριγωνομετρικοί αριθμοί			
σε μοίρες	σε rad	ημω	συνω	εφω	σφω
0°	0	0	1	0	Δεν ορίζεται
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Δεν ορίζεται	0

Β. **i.**Λ **ii.**Σ **iii.** Σ **iv.**Σ **v.**Σ

Θέμα 2ο:

Έχουμε το σύστημα $\left.\begin{array}{l} x+2y=9 \\ 3x-7y=1 \end{array}\right\}(\Sigma)$

Α. Θεωρούμε τις ευθείες $\varepsilon_1 : x+2y=9$ και $\varepsilon_2 : 3x-7y=1$. Θα κατασκευάσουμε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τις δύο ευθείες. Έχουμε τους εξής πίνακες τιμών των δύο ευθειών:

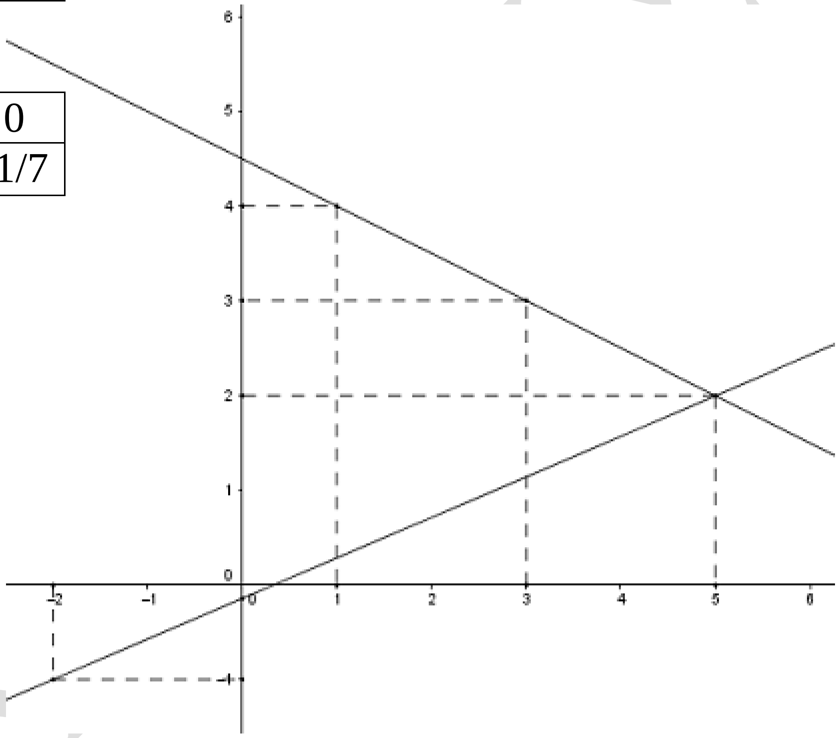
ε_1:

x	1	3
y	4	3

ε_2:

x	-2	0
y	-1	-1/7

Άρα έχουμε:



Δηλαδή (x,y)=(5,2).

Β.

$$\left.\begin{array}{l} x+2y=9 \\ 3x-7y=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2y+9 \\ 3(-2y+9)-7y=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2y+9 \\ -6y+27-7y=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-2y+9 \\ -6y-7y=1-27 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2y+9 \\ -13y=-26 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2y+9 \\ \dfrac{-13y}{-13}=\dfrac{-26}{-13} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2\cdot 2+9 \\ y=2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x=5 \\ y=2 \end{pmatrix}.$$

Δηλαδή (x,y)=(5,2).

Γ.

$$\left.\begin{matrix} x+2y=9 \\ 3x-7y=1 \end{matrix}\right\} \overset{\cdot(-3)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{matrix} -3x-6y=-27 \\ 3x-7y=1 \end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{matrix} -13y=-26 \\ x+2y=9 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \dfrac{-13y}{-13}=\dfrac{-26}{-13} \\ x+2y=9 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} y=2 \\ x+2\cdot 2=9 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y=2 \\ x=5 \end{pmatrix}.$$

Δηλαδή (x,y)=(5,2).

Δ. Βρίσκουμε την ορίζουσα των συντελεστών του $\left.\begin{matrix} x+2y=9 \\ 3x-7y=1 \end{matrix}\right\}(\Sigma)$.

Είναι: $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}=-7-6=-13\neq 0$, άρα το (Σ) έχει μοναδική λύση.

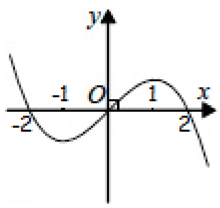
Θα βρούμε και τις άλλες ορίζουσες του (Σ). Έχουμε:

$D_x=\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}=-63-2=-65$ και $D_y=\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=1-27=-26$

Τότε η λύση του (Σ) είναι: $(x,y)=\left(\dfrac{D_x}{D},\dfrac{D_y}{D}\right)=\left(\dfrac{-65}{-13},\dfrac{-26}{-13}\right)=(5,2)$.

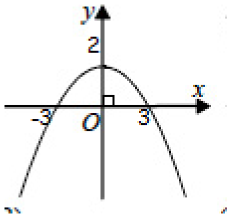
<u>Θέμα 3ο:</u>

A.i.



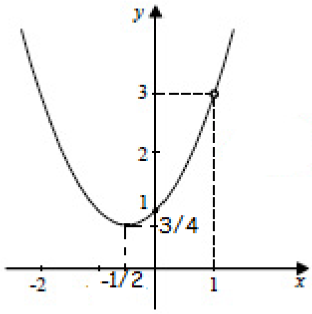
Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$ και στο $[1,+\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$. Δεν παρουσιάζει ολικά ακρότατα. Είναι περιττή εφόσον έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

ii.



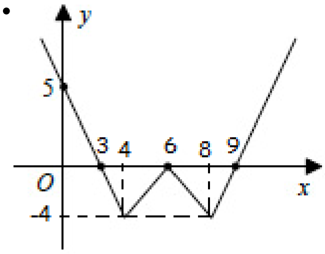
Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Παρουσιάζει ολικό μέγιστο το 2 για x=0. Είναι άρτια διότι έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

iii.



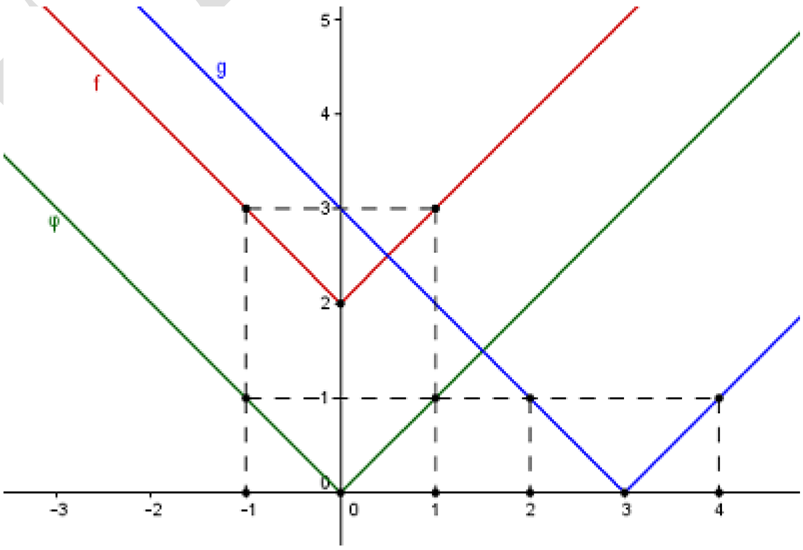
Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$. Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $\frac{3}{4}$ για $x=-\frac{1}{2}$. Δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

iv.



Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,4]$, γνησίως αύξουσα στο $[4,6]$, γνησίως φθίνουσα στο $[6,8]$ και γνησίως αύξουσα στο $[8,+\infty)$.Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το -4 για x=4 και για x=8. Δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

B. Έχουμε τις συναρτήσεις $\varphi(x)=|x|$, $f(x)=|x|+2$ και $g(x)=|x-3|$. Η f είναι μετατόπιση της φ κατά 2 μονάδες πάνω και η g μετατόπιση της φ κατά 3 μονάδες δεξιά.



Γ.i. Για να είναι ίσα τα πολυώνυμα

$P(x)=(\kappa-1)x^3-3x-\mu$ και $Q(x)=(\lambda-\mu)x+\mu-1$, πρέπει:

$$\left.\begin{array}{l}\kappa-1=0\\ \lambda-\mu=-3\\ -\mu=\mu-1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\kappa=1\\ \lambda-\mu=-3\\ 2\mu=1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\kappa=1\\ \lambda-\dfrac{1}{2}=-3\\ \mu=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\kappa=1\\ \lambda=-\dfrac{5}{2}\\ \mu=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}.$$

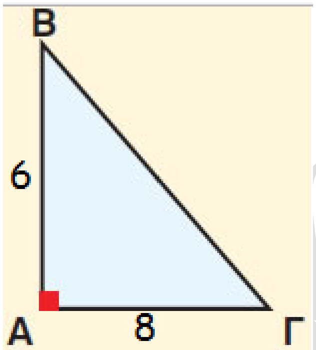
ii. Για κ=1 , $\lambda=-\dfrac{5}{2}$ και $\mu=\dfrac{1}{2}$ το πολυώνυμο είναι:

$P(x)=(1-1)x^3-3x-\dfrac{1}{2}=-3x-\dfrac{1}{2}$ άρα η αριθμητική τιμή του

Πολυωνύμου $P(x)$ για x=0 είναι: $P(0)=-3\cdot0-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$.

<u>Θέμα 4ο:</u>

Α.



Από Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$B\Gamma^2=A\Gamma^2+AB^2\Leftrightarrow B\Gamma^2=6^2+8^2\Leftrightarrow B\Gamma^2=36+64\Leftrightarrow B\Gamma^2=100\Leftrightarrow$

$B\Gamma=\sqrt{100}\Leftrightarrow B\Gamma=10$. Τότε:

$$\eta\mu B=\frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}=\frac{A\Gamma}{B\Gamma}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

$$\sigma\upsilon\nu B=\frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}=\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

$$\varepsilon\varphi B=\frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}=\frac{A\Gamma}{AB}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

$$\sigma\varphi B=\frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}=\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

Ομοίως είναι: $\eta\mu\Gamma=\dfrac{AB}{B\Gamma}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\Gamma=\dfrac{A\Gamma}{B\Gamma}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$,

$\varepsilon\varphi\Gamma=\dfrac{AB}{A\Gamma}=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$ και $\sigma\varphi\Gamma=\dfrac{A\Gamma}{AB}=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}$.

Β.

$$A=\frac{\varepsilon\varphi(5\pi-\theta)\cdot\varepsilon\varphi\left(\dfrac{9\pi}{2}+\theta\right)\cdot\eta\mu\left(2017\pi+\theta\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{15\pi}{2}-\theta\right)\cdot\sigma\varphi(-\theta)\cdot\sigma\varphi\left(\dfrac{23\pi}{2}+\theta\right)}$$

$$A=\frac{(-\varepsilon\varphi\theta)\cdot(-\sigma\varphi\theta)\cdot(-\eta\mu\theta)}{(-\eta\mu\theta)\cdot(-\sigma\varphi\theta)\cdot(-\varepsilon\varphi\theta)}=1.$$

Γ. Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ έχει :

* Πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.

* Σύνολο τιμών το $B=[-1,1]$.

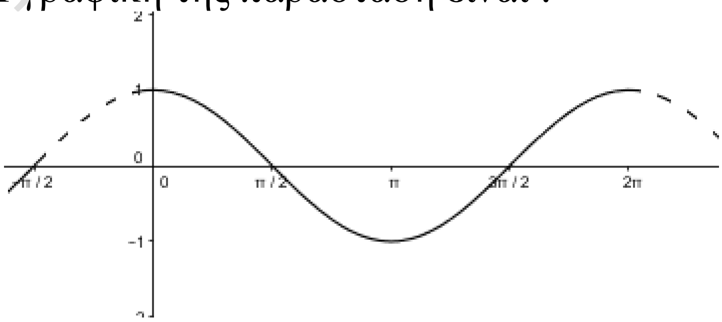
* Είναι περιοδική με περίοδο Τ=2π .

* Είναι άρτια , εφόσον $f(-x)=\sigma\upsilon\nu(-x)=\sigma\upsilon\nu x=f(x)$, οπότε έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

* Παρουσιάζει ολικό μέγιστο το y=1 για $x=0$ και για $x=2\pi$, ενώ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=\pi$.

* Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\pi,2\pi]$.

* Η γραφική της παράσταση είναι :



Δ.i.

$$
\begin{array}{r|l}
3x^3+6x^2-17x+20 & x+3 \\ \cline{2-2}
\underline{-3x^3-9x^2} & 3x^2-3x-8 \\
-3x^2-17x+20 & \\
\underline{3x^2+9x} & \\
-8x+20 & \\
\underline{8x+24} & \\
44 &
\end{array}
$$

Επομένως, $3x^3+6x^2-17x+20=(x+3)(3x^2-3x-8)+44$

ii.

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner έχουμε,

-1	0	75	-250	-10
	10	-100	250	
-1	10	-25	0	

Επομένως $\upsilon=0$ και $\pi(x)=-x^2+10x-25$