ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

109

Ον/μο:……………….. **Α' Λυκείου**

Ύλη: Πραγματικοί αριθμοί, Εξισώσεις **05-02-22**

Θέμα 1ο:

Α. Ποια εξίσωση λέγεται εξίσωση 2ου βαθμού; **(5 μον.)**

Β. Τι ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α; **(5 μον.)**

Γ. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$ με ρίζες $x_1,\ x_2$.

Να αποδείξετε ότι $x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $x_1\cdot x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$. **(5 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Αν x πραγματικός αριθμός, τότε: $|x-1|=|1-x|$. **Σ Λ**

ii. $\sqrt{x^2}=\left(\sqrt{x}\right)^2$ για κάθε πραγματικό αριθμό x. **Σ Λ**

iii. Αν $\alpha\neq 0$, τότε η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ έχει μοναδική λύση. **Σ Λ**

iv. Αν $\alpha<0$ και ν περιττός θετικός ακέραιος, τότε η εξίσωση $x^\nu=\alpha$ έχει μοναδική λύση. **Σ Λ**

v. Αν $|x|=\alpha$ τότε $x=\pm\alpha$. **Σ Λ**

(5x2=10μον.)

Θέμα 2ο:

Α. Δίνονται οι αριθμοί $A=\alpha^2-2\alpha$ και $B=\beta^2-4\beta+5$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί:

i. Να αποδείξετε ότι: $A\geq -1$ και B>0. **(4 μον.)**

ii. Αν $1<\alpha<3$ και $2<\beta<4$, να δείξετε ότι $-3<\alpha-\beta<1$ και $1<\dfrac{4\alpha}{\beta}<6$. **(6 μον.)**

iii. Να δείξετε ότι $A+B\geq 0$. Πότε ισχύει η ισότητα; **(5 μον.)**

Β. Δίνονται οι παραστάσεις: $\Gamma=|x-1|$ και $\Delta=|x-3|$

i. Να λύσετε την εξίσωση $\Gamma=2$. **(3 μον.)**

ii. Να λύσετε την εξίσωση $\big|\Delta-2|x-3|\big|=|x-1|$. **(4 μον.)**

iii. Αν x=17 να λύσετε την εξίσωση $y^4-\Gamma=0$. **(3 μον.)**

<u>Θέμα 3ο:</u>

Α. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2}$ και $\beta=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

Να αποδείξετε ότι α=2 και β=4. **(6 μον.)**

Β. Δίνεται η παράσταση $A=\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^2-4x+4}}-\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x^2-8x+16}}$ με $2<x<4$.

i. Να απλοποιήσετε την παράσταση Α και να δείξετε ότι $A=2x+6$. **(7 μον.)**

ii. Να λύσετε την εξίσωση $A=12$. **(3 μον.)**

Γ. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\left(x^2-2x+5\right)\cdot\left(4x^2+4x+1\right)=0$. **(6 μον.)**

ii. $x^2-\left(\sqrt{3}+2\right)x+\sqrt{12}=0$. **(3 μον.)**

<u>Θέμα 4ο:</u>

Α. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $x^4+8x=0$ **(2 μον.)**

ii. $\dfrac{2}{x^2-4}-\dfrac{1}{x^2-2x}+\dfrac{x-4}{x^2+2x}=0$ **(4 μον.)**

iii. $\dfrac{|x|-4}{5}=\dfrac{|x|-3}{2}+\dfrac{4|x|-1}{3}$ **(4 μον.)**

Β. Να λυθεί η εξίσωση $\lambda(\lambda-4)x=4(\lambda-4)$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$. **(7 μον.)**

Γ. Δίνεται η εξίσωση $2x^2+(\lambda-9)x+\lambda^2+3\lambda+4=0$.

i. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης. **(5 μον.)**

ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα. **(3 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(Ενδεικτικές)

Θέμα 1ο:

Α. Θεωρία
Β. Θεωρία
Γ. Θεωρία
Δ. **i.** Σ **ii.** Λ **iii.** Σ **iv.** Σ **v.** Λ

Θέμα 2ο:

Α. Δίνονται οι αριθμοί $A=\alpha^2-2\alpha$ και $B=\beta^2-4\beta+5$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί:

i. Είναι: $A\geq -1\Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha\geq -1\Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha+1\geq 0\Leftrightarrow (\alpha-1)^2\geq 0$

που ισχύει . Επίσης:

$B>0\Leftrightarrow \beta^2-4\beta+5>0\Leftrightarrow \beta^2-4\beta+4+1>0\Leftrightarrow (\beta-2)^2+1>0$

που ισχύει

ii. Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}1<\alpha<3\\2<\beta<4\end{array}\right\}\underset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l}1<\alpha<3\\-2>-\beta>-4\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}1<\alpha<3\\-4<-\beta<-2\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}-3<\alpha-\beta<1.$$

$$\left.\begin{array}{l}1<\alpha<3\\2<\beta<4\end{array}\right\}\overset{\cdot 4}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l}4<4\alpha<12\\ \dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{\beta}>\dfrac{1}{4}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}4<4\alpha<12\\ \dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{\beta}<\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\overset{(\cdot)}{\Leftrightarrow}1<\frac{4\alpha}{\beta}<6$$

iii. Είναι:

$A+B\geq 0\Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha+\beta^2-4\beta+5\geq 0\Leftrightarrow$

$\alpha^2-2\alpha+1+\beta^2-4\beta+4\geq 0\Leftrightarrow (\alpha-1)^2+(\beta-2)^2\geq 0$ που ισχύει.

Το «=» ισχύει όταν α=1 και β=2.

Β. $\Gamma=|x-1|$ και $\Delta=|x-3|$

i. $\Gamma=2\Leftrightarrow |x-1|=2\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}x-1=2\\x-1=-2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}x=3\\x=-1\end{array}\right\}$

ii. Είναι:

$\big||x-3|-2|x-3|\big|=|x-1|\Leftrightarrow \big|-|x-3|\big|=|x-1|\Leftrightarrow |x-3|=|x-1|\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}x-3=x-1\\x-3=1-x\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}0x=2\ \text{αδύνατη}\\2x=4\end{array}\right\}\Leftrightarrow x=2$$

iii. Αν x=17 τότε Γ=16, οπότε:

$y^4-\Gamma=0\Leftrightarrow y^4-16=0\Leftrightarrow y^4=16\Leftrightarrow y=\pm 2$.

Θέμα 3ο:

Α. $\alpha=\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2}=2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=2^{\frac{6}{6}}=2$

$$\beta=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}=$$

$$\frac{\left(\sqrt{5}\right)^2-\sqrt{15}+\sqrt{15}+\left(\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{5+3}{5-3}=\frac{8}{2}=4$$

Β. i. Είναι:

$$A=\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2-4x+4}}-\frac{x^2-16}{\sqrt{x^2-8x+16}}=\frac{(x-2)(x+2)}{\sqrt{(x-2)^2}}-\frac{(x-4)(x+4)}{\sqrt{(x-4)^2}}=$$

$$\frac{(x-2)(x+2)}{|x-2|}-\frac{(x-4)(x+4)}{|x-4|}\overset{2<x<4}{=}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}+\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}=$$

$$x+2+x+4=2x+6$$

ii. $A=12\Leftrightarrow 2x+6=12\Leftrightarrow 2x=6\Leftrightarrow x=3$

Γ. i. Έχουμε:

$$\left(x^2-2x+5\right)\cdot\left(4x^2+4x+1\right)=0\Leftrightarrow$$

$x^2-2x+5=0,\ \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=4-20=-16<0,$ αδύνατη

ή

$4x^2+4x+1=0\Leftrightarrow(2x+1)^2=0\Leftrightarrow 2x+1=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ διπλή

ii. Είναι:

$$x^2-\left(\sqrt{3}+2\right)x+\sqrt{12}=0\Leftrightarrow x^2-\left(\sqrt{3}+2\right)x+2\sqrt{3}=0\Leftrightarrow$$

$x=2$ ή $x=\sqrt{3}$

Θέμα 4ο:

Α. i. Είναι:

$$x^4+8x=0 \Leftrightarrow x\left(x^3+8\right)=0 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ x^3+8=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ x^3=-8 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right\}$$

ii. Έχουμε:

$$\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-2x}+\frac{x-4}{x^2+2x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{x(x-2)}+\frac{x-4}{x(x+2)}=0 \underset{x\neq 0, x\neq \pm 2}{\overset{\text{Ε.Κ.Π.}=x(x-2)(x+2)}{\Leftrightarrow}}$$

$$2x-(x+2)+(x-2)(x-4)=0 \Leftrightarrow 2x-x-2+x^2-4x-2x+8=0 \Leftrightarrow$$

$$x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=3 \text{ ή } x=2 \text{ απορ.}$$

iii. Θέτοντας $|x|=\omega$ η δοθείσα εξίσωση γίνεται:

$$\frac{\omega-4}{5}=\frac{\omega-3}{2}+\frac{4\omega-1}{3} \overset{\text{Ε.Κ.Π.}=30}{\Leftrightarrow} 6(\omega-4)=15(\omega-3)+10(4\omega-1) \Leftrightarrow$$

$$6\omega-24=15\omega-45+40\omega-10 \Leftrightarrow 6\omega-15\omega-40\omega=-45-10+24 \Leftrightarrow$$

$$-49\omega=-31 \Leftrightarrow \omega=\frac{31}{49}$$

Επομένως, $|x|=\frac{31}{49} \Leftrightarrow x=\pm\frac{31}{49}$

Β. Είναι: $\lambda(\lambda-4)x=4(\lambda-4)$ (1)

$\rightarrow$ Αν $\lambda(\lambda-4)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 4$ τότε η (1) έχει μοναδική λύση την $x=\frac{4(\lambda-4)}{\lambda(\lambda-4)}=\frac{4}{\lambda}$.

$\rightarrow$ Αν $\lambda(\lambda-4)=0 \Leftrightarrow \lambda=0$ ή $\lambda=4$ τότε:

* Αν λ=0 η (1) γίνεται: $0x=-16$ αδύνατη
* Αν λ=4 η (1) γίνεται: $0x=0$ ταυτότητα.

Γ. Δίνεται η εξίσωση $2x^2+(\lambda-9)x+\lambda^2+3\lambda+4=0$.

i. Είναι:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(\lambda-9)^2-4\cdot 2\cdot(\lambda^2+3\lambda+4)=$$

$$\lambda^2-18\lambda+81-8\lambda^2-24\lambda-32=-7\lambda^2-42\lambda+49$$

ii. Για να έχει η εξίσωση διπλή ρίζα πρέπει:

$$\Delta=0\Leftrightarrow-7\lambda^2-42\lambda+49=0\overset{:(-7)}{\Leftrightarrow}\lambda^2+6\lambda-7=0\Leftrightarrow\lambda=-7 \text{ ή } \lambda=1$$