ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

219

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη:Μέχρι ακρότατα **5-1-22**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα [α,β].
Αν • Η f είναι συνεχής στο [α,β] και
• $f(\alpha)\neq f(\beta)$
Να αποδείξετε ότι για κάθε η μεταξύ των $f(\alpha)$ και f(β) υπάρχει $x_o\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_o)=\eta$ **(μον.7)**

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] ; **(μον.4)**

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία. **(μον.4)**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν f,g είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α και Β αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι το $A\cap B$.

β. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο Α και x_o ένα εσωτερικό σημείο του Α. Αν η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_o τότε $f(x)\geq f(x_o)$.

γ. Αν μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε ισχύει ότι $f'(x)>0,\forall x\in\Delta$.

δ. Για οποιαδήποτε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>0$ ισχύει ότι f(x) > 0 , για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε. Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο x_0 . **(μον.10)**

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ με $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ και η $g(x)$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x-h)-g(x)}{h}=-g(x)$ και $g(0)=1$.

Β1. Να δείξετε ότι $g(x)=e^x$ και να βρείτε τη συνάρτηση $f(x)=(hog)(x)$. **(μον.8)**

Β2. Να ορίσετε την αντίστροφη της f. **(μον.7)**

Β3. Να λύσετε την ανίσωση:

$$(x-1)\left(\frac{1}{e}e^x+1\right)<(x+1)\left(\frac{1}{e}e^x-1\right),\ x>0\ .$$ **(μον.5)**

Β4. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)\eta\mu\dfrac{f^{-1}(x)}{f(x)}\right]$. **(μον.5)**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να βρεθούν οι τιμές του ακέραιου λ ώστε η διμελής σχέση

$f(x)=\begin{cases}2\ln x+3, & x\le e^{\lambda^2}\\ \ln x+7, & x\ge e^{2\lambda}\end{cases}$, να είναι συνάρτηση. **(μον.3)**

Γ2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x$.Να αποδείξετε ότι:

1. $f(5^\nu)+f(7^\nu)>f(6^\nu)+f(8^\nu)$, $\nu\in N^*$ **2.** $f(2x)+1>f(3x)+f(e^x)$ **(μον.4)**

Γ3. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, $f(x)>0$ να δείξετε ότι η $\varphi(x)=\dfrac{1}{f(x)}+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.Στη συνέχεια να μελετήσετε τη μονοτονία της $h(x)=e^{-x}+e^{\frac{1}{x}}-\ln x$ **(μον.4)**

Γ4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ και $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

α) Να βρείτε τα ακρότατα των f και g.

β) Να λύσετε τις εξισώσεις:

1. $g(2f(x-3)-2)=1$ **2.** $e^x+\dfrac{1}{e^x}=\dfrac{2}{x^2+1}$

γ) Για κάθε α, $\beta\in\mathbb{R}$,με $\alpha\cdot\beta\neq 0$, να δείξετε ότι:.

$(f(\alpha)-1)(1-f(\beta))<0$. **(μον.6)**

Γ5.Δίνεται συνάρτηση $f(x)=x^3+6x^2+12x+10$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

β)Να λύσετε την εξίσωση $(f\circ f)(x)=3$. **(μον.4)**

Γ6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\left(\mu^2+\mu-5\right)x^3-\left(\mu+3\right)x^2+7x-3}{\left(x^2-1\right)^2}$.

Να βρείτε τις τιμές του $\mu\in R$ για τις οποίες η f έχει στο $x_0=1$ όριο $L\in R$ και να βρείτε το L. **(μον.4)**

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [α, β] και γνησίως αύξουσα στο διάστημα [α, β]. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε:

$$f(\xi)=\frac{f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{3}.$$ **(μον.3)**

Δ2.Αν $f(x)=e^{-x}$ και $g(x)=-\ln x$ και είναι A το σημείο τομής της C_f με τον y΄y και B το σημείο τομής της Cg με τον x΄x, να αποδείξετε ότι η ευθεία AB είναι κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g.Να γίνει το αντίστοιχο σχήμα. **(μον.4)**

Δ3. Ένας προβολέας τοποθετείται στο έδαφος σε απόσταση 10m από ένα κτίριο. Ένας άνδρας ύψους 2m προχωρεί από τον προβολέα προς το κτίριο με ρυθμό $\frac{5}{3}$m/sec. Να βρεθεί ο ρυθμός με τον οποίο η σκιά του στον τοίχο κονταίνει, όταν απέχει 5m απ' αυτόν. **(μον.4)**

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + \alpha x + \beta = 0,\ \alpha > 0$ έχει μία μόνο πραγματική ρίζα. **(μον.4)**

Δ5. Να λύσετε την εξίσωση $e^{|x|} - e^2 = |x| - 2$. **(μον.4)**

Δ6. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ **2.** $f(x) = \sqrt[3]{x^2} \cdot \eta\mu x$. **(μον.6)**

ΚΑΛΗ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ