ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

218

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη: Μέχρι ακρότατα **5-1-22**

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.
Αν • Η f είναι συνεχής στο Δ και
• $f'(x) = 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ,
να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ. **(μον.7)**

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] ; **(μον.4)**

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία. **(μον.4)**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν f,g είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α και Β αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$.

β. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$.

γ. Αν μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε ισχύει ότι $f'(x) > 0, \forall x \in \Delta$.

δ. Για οποιαδήποτε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$ ισχύει ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε. Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο x_0 . **(μον.10)**

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ με $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ και η $g(x)$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x-h)-g(x)}{h}=-g(x)$ και $g(0)=1$.

Β1. Να δείξετε ότι $g(x)=e^x$ και να βρείτε τη συνάρτηση $f(x)=(h o g)(x)$. **(μον.8)**

Β2. Να ορίσετε την αντίστροφη της f. **(μον.7)**

Β3. Να λύσετε την ανίσωση:

$$(x-1)\left(\frac{1}{e}e^x+1\right)<(x+1)\left(\frac{1}{e}e^x-1\right),\ x>0 .$$ **(μον.5)**

Β4. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)\eta\mu\dfrac{f^{-1}(x)}{f(x)}\right]$. **(μον.5)**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να βρεθούν οι τιμές του ακέραιου λ ώστε η διμελής σχέση

$f(x)=\begin{cases} 2\ln x+3, & x\le e^{\lambda^2} \\ \ln x+7, & x\ge e^{2\lambda} \end{cases}$, να είναι συνάρτηση. **(μον.3)**

Γ2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x$.Να αποδείξετε ότι:

1. $f(5^\nu)+f(7^\nu)>f(6^\nu)+f(8^\nu)$,$\nu\in N^*$ **2.** f(2x)+1>f(3x)+f(e^x)**(μον.4)**

Γ3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x+2$.

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία

β) Να λυθεί η ανίσωση $f(f(x))\le 4,\ x\in[-1,0]$. **(μον.4)**

Γ4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ και $g(x)=\dfrac{1}{x^{2}+1}$

α) Να βρείτε τα ακρότατα των f και g.

β) Να λύσετε τις εξισώσεις:

1. $g(2f(x-3)-2)=1$ **2.** $e^{x}+\dfrac{1}{e^{x}}=\dfrac{2}{x^{2}+1}$

γ) Για κάθε α, β $\in \mathbb{R}$,με $\alpha\cdot\beta\neq 0$, να δείξετε ότι:.
$(f(\alpha)-1)(1-f(\beta))<0$. **(μον.6)**

Γ5.Δίνεται συνάρτηση $f(x)=x^{3}+6x^{2}+12x+10$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

β)Να λύσετε την εξίσωση $(f\circ f)(x)=3$. **(μον.4)**

Γ6.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\left(\mu^{2}+\mu-5\right)x^{3}-\left(\mu+3\right)x^{2}+7x-3}{\left(x^{2}-1\right)^{2}}$.

Να βρείτε τις τιμές του $\mu\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η f έχει στο $x_0=1$ όριο $L\in\mathbb{R}$ και να βρείτε το L. **(μον.4)**

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [α, β] και γνησίως αύξουσα στο διάστημα [α, β]. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε:

$f(\xi)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{3}$. **(μον.4)**

Δ2.Αν $f(x)=e^{-x}$ και $g(x)=-\ln x$ και είναι Α το σημείο τομής της C_f με τον y΄y και Β το σημείο τομής της Cg με τον x΄x, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ είναι κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g.Να γίνει το αντίστοιχο σχήμα. **(μον.3)**

Δ3. Ένας προβολέας τοποθετείται στο έδαφος σε απόσταση 10m από ένα κτίριο. Ένας άνδρας ύψους 2m προχωρεί από τον προβολέα προς το κτίριο με ρυθμό $\frac{5}{3}$ m/sec. Να βρεθεί ο ρυθμός με τον οποίο η σκιά του στον τοίχο κονταίνει, όταν απέχει 5m απ' αυτόν. **(μον.4)**

Δ4. Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f : R \to R^*$ με συνεχή παράγωγο,

αν $f(0) = 1$ και $\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)' = -\dfrac{1}{f'(x)}$ για κάθε $x \in R$. **(μον.4)**

Δ5. Αν $f(x) = e^{x^2} - x^2 + 1$ να δείξετε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα.
Στη συνέχεια λύστε την εξίσωση:
$f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x+3) - f(x)$. **(μον.4)**

Δ6. α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση:
$f(x) = x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x,\ x \in [0, \pi]$.

β) Εστω η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{\eta\mu x}{x},\ x \in (0, \pi)$.

1. Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία.

2. Να αποδείξετε ότι ισχύει $\eta\mu x > \dfrac{2x}{\pi}$ για κάθε $x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$.

3. Να αποδείξετε ότι σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:
ημΑ+ημΒ+ημΓ>2. **(μον.6)**

ΚΑΛΗ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ