ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 50

Ον/μο:……………….. **Α΄ Λυκείου**

Ύλη: Τρίγωνα **07-11-20**

<u>Θέμα 1ο:</u>

Α. Τι ονομάζουμε μεσοκάθετο ενός ευθύγραμμου τμήματος και ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα που έχουν τα σημεία της; **(6 μον.)**

Β. Να διατυπώσετε το Γ-Π-Γ. **(6 μον.)**

Γ. Να αποδείξετε ότι δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες, αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα. **(8 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Η διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου είναι διχοτόμος και ύψος. **Σ Λ**

ii. Αν δύο τρίγωνα έχουν όλες τους τις γωνίες ίσες, μία προς μία, τότε είναι ίσα. **Σ Λ**

iii. Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας. **Σ Λ**

iv. Αν για δύο τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $Α'Β'Γ'$ ισχύει ότι $α = α'$, $β = β'$ και $Α = Α'$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα. **Σ Λ**

v. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία οξεία γωνία τους αντίστοιχα ίση, τότε θα έχουν όλες τους τις γωνίες, αντίστοιχα ίσες. **Σ Λ**

(5x1=5μον.)

<u>Θέμα 2ο:</u>

Α. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ(ΑΒ=ΑΓ) και οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ. Αν $ΕΗ \perp ΒΓ$ και $ΔΖ \perp ΒΓ$, να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ είναι ίσα. **(6 μον.)**

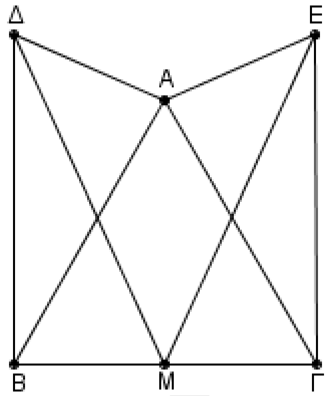
ii. ΕΗ=ΔΖ. **(7 μον.)**

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Β. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Στα Σημεία Β και Γ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της ΒΓ, τα τμήματα $ΒΔ \perp ΒΓ$ και $ΓΕ \perp ΒΓ$ τέτοια ώστε ΒΔ=ΓΕ. Αν Μ το μέσο της ΒΓ, να δείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα.

ii. ΑΔ=ΑΕ.



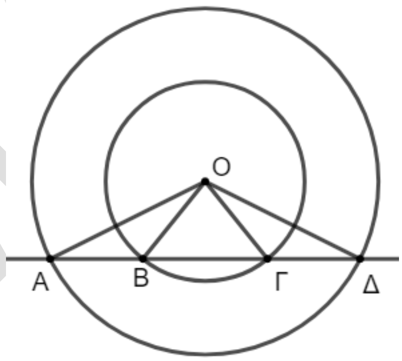
(2x6=12μον.)

<u>Θέμα 3ο:</u>

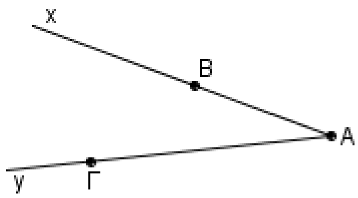
Α. Στο διπλανό σχήμα το Ο είναι το κέντρο των δύο κύκλων. Να αποδείξετε ότι:

i. ΑΒ=ΓΔ. **(6 μον.)**

ii. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ. **(7 μον.)**



Β. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το χάρτη μιας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Αx και Αy παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία Β και Γ βρίσκονται δύο πλατάνια. Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό τι:



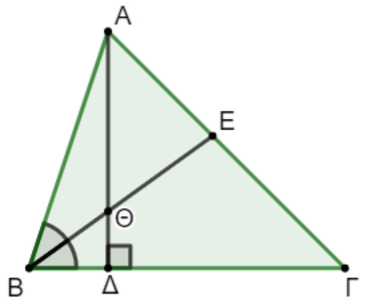
i. Ισαπέχει από τα δύο πλατάνια. **(4 μον.)**

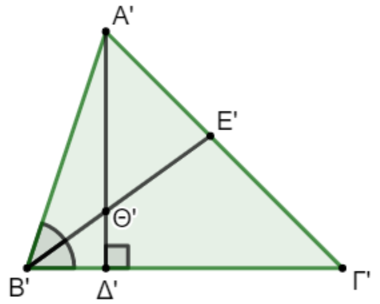
ii. Ισαπέχει από τα δύο ποτάμια. **(4 μον.)**

iii. Ισαπέχει από τα δύο πλατάνια και τα δύο ποτάμια. **(4 μον.)**

Θέμα 4ο:

Α. Έστω δύο ίσα οξυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ και $Α'Β'Γ'$. Το ύψος ΑΔ και η διχοτόμος ΒΕ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο σημείο Θ, ενώ το αντίστοιχο ύψος $Α'Δ'$ και η αντίστοιχη διχοτόμος $Β'Ε'$ του τριγώνου $Α'Β'Γ'$ τέμνονται στο σημείο $Θ'$.

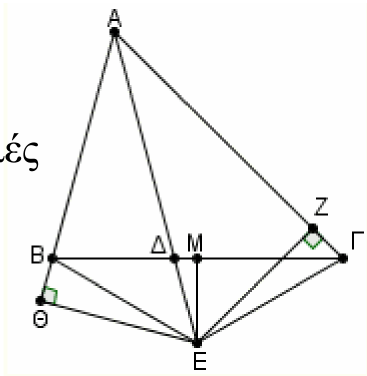




Να αποδείξετε ότι:

i. $ΘΔ = Θ'Δ'$. **(7 μον.)**

ii. $ΘΕ = Θ'Ε'$. **(6 μον.)**



Β. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος, η κάθετη από το μέσο Μ της ΒΓ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου ΑΔ στο σημείο Ε. Αν Θ, Ζ είναι οι προβολές του ε στις ΑΒ, ΑΓ , να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές. **(4 μον.)**

ii. Τα τρίγωνα ΘΒΕ και ΖΓΕ είναι ίσα. **(4 μον.)**

iii. $\hat{ΑΓΕ} + \hat{ΑΒΕ} = 180^\circ$. **(4 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

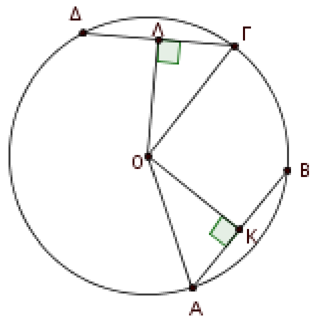
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

Θέμα 1ο:

Α. Μεσοκάθετο ενός ευθύγραμμου τμήματος, ονομάζουμε την ευθεία που διέρχεται κάθετα από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος. Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος.

Β. Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά αντίστοιχα ίση και τις προσκείμενες γωνίες, σ' αυτή την πλευρά, αντίστοιχα ίσες, μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Γ.



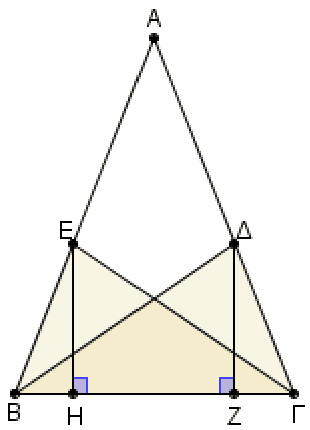
($\Rightarrow$) Έστω οι ίσες χορδές ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου (Ο,ρ) και ΟΚ , ΟΛ τα αποστήματα τους αντίστοιχα .Τα τρίγωνα ΚΟΑ και ΛΟΓ , έχουν $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90^\circ$, ΟΑ=ΟΓ(=ρ) και ΑΚ=ΓΛ(αφού ΑΒ=ΓΔ). Επομένως είναι ίσα , οπότε ΟΚ=ΟΛ.

($\Leftarrow$) Έστω ότι τα αποστήματα ΟΚ και ΟΛ είναι ίσα . Τότε τα τρίγωνα ΚΟΑ και ΛΟΓ έχουν $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90^\circ$,ΟΑ=ΟΓ(=ρ) και ΟΚ=ΟΛ άρα είναι ίσα . Οπότε , ΑΚ=ΓΛ

Δ. **i**. Λ **ii.** Λ **iii.** Σ **iv.** Λ **v.** Σ

Θέμα 2ο:

Α.



ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

i. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΓΔ, ΓΒΕ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\text{ΒΓ : κοινή} \\ 2.\text{ΕΒΓ} = \text{ΔΓΒ}\left(\text{προσκ.στη βάση ισοσκ.}\right) \\ 3.\text{ΔΒΓ} = \text{ΕΓΒ}\left(\text{ως μισά ίσων γωνιών}\right) \end{array}\right\} \overset{\text{Γ–Π–Γ}}{\Rightarrow}$$

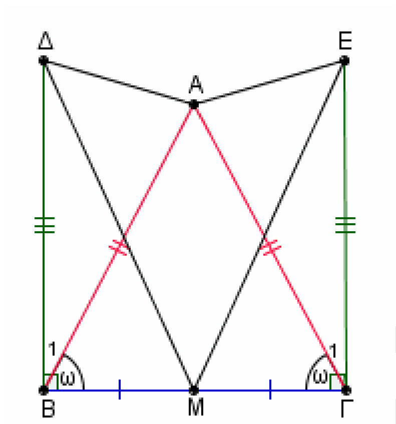
Τα τρίγωνα είναι ίσα.

ii. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΒΗ, ΔΓΖ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\text{ΕΒ} = \text{ΓΔ}\left(\text{προηγ.σύγκριση}\right) \\ 2.\text{Β} = \text{Γ}\left(\text{προσκ.στη βάση ισοσκ.}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα.

Β.



i. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ, ΓΕΜ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\text{ΒΜ} = \text{ΜΓ}\left(\text{Υ}\right) \\ 2.\text{ΓΕ} = \text{ΜΔ}\left(\text{Υ}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο πλευρές αντίστοιχα ίσες, μία προς μία, άρα είναι ίσα.

ii. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΑΔ και ΓΑΕ:

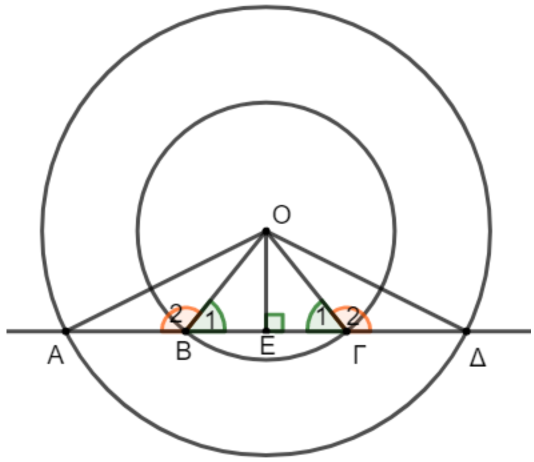
$$\left.\begin{array}{l} 1.\text{ΔΒ} = \text{ΓΕ}\left(\text{Υ}\right) \\ 2.\text{Β}_1 = \text{Γ}_1\left(\text{ως συμπλ. ίσων γωνιών}\right) \\ 3.\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}\left(\text{Υ}\right) \end{array}\right\} \overset{\text{Π–Γ–Π}}{\Rightarrow}$$ Τα τρίγωνα είναι ίσα.

Επομένως, όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους θα είναι ίσα, άρα ΑΔ=ΑΕ.

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Θέμα 3[ο]:

Α.



i. Φέρουμε το ύψος ΟΕ του τριγώνου ΟΒΓ. Τα τρίγωνα ΟΒΓ και ΟΑΔ είναι ισοσκελή εφόσον ΟΒ=ΟΓ και ΟΑ=ΟΔ ως ακτίνες των κύκλων. Οπότε η ΟΕ θα είναι και διάμεσος των τριγώνων. Δηλαδή θα είναι ΑΕ=ΕΔ και ΒΕ=ΕΓ. Αφαιρώντας τις δύο αυτές ισότητες κατά μέλη, προκύπτει ότι ΑΒ=ΓΔ.

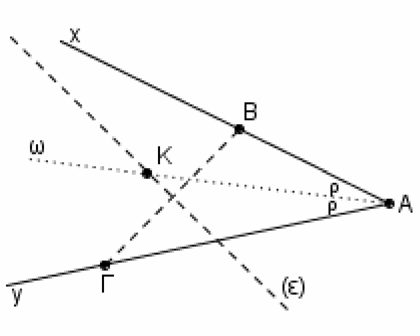
ii. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\mathrm{B}_2=\Gamma_2\left(\text{ως παραπληρώματα των } \mathrm{B}_1=\Gamma_1\right) \\ 2.\mathrm{OB}=\mathrm{O}\Gamma\left(\text{ως ακτίνες του κύκλου}\right) \\ 3.\mathrm{AB}=\Gamma\Delta(\text{προηγούμενο ερώτημα}) \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Rightarrow}$$

Τα τρίγωνα είναι ίσα.

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Β.



i. Τα σημεία που ισαπέχουν από τα σημεία Β αι Γ , βρίσκονται στη μεσοκάθετο (ε) του τμήματος ΒΓ.

ii. Τα σημεία που ισαπέχουν από τις πλευρές Αx και Αy της γωνίας Α, βρίσκονται στη διχοτόμο Αω της γωνίας Α.

iii. Τα σημεία που ισαπέχουν από τα σημεία Β και Γ και από τις πλευρές της γωνίας Α, βρίσκονται στην τομή της (ε) και της μεσοκάθετης του τμήματος ΒΓ, δηλαδή είναι το σημείο Κ.

<u>Θέμα 4ο:</u>

Α.

i. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και $A'B'\Delta'$:

$$\left.\begin{array}{l} 1.AB = A'B'(Y) \\ 2.B = B' \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα. Οπότε όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους θα είναι ίσα, δηλαδή $B\Delta = B'\Delta'$ (1).

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΘΔ και $B'\Theta'\Delta'$:

$$\left.\begin{array}{l} 1.B\Delta = B'\Delta'(1) \\ 2.B_2 = B'_2(\text{ως μισά ίσων γωνιών}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

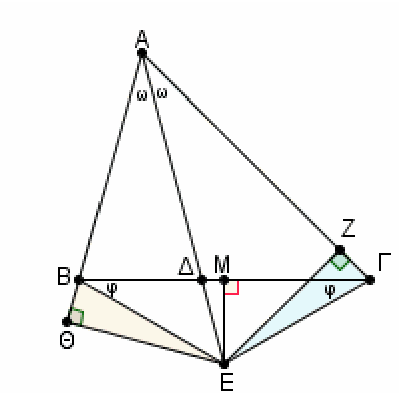
Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα. Οπότε όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους θα είναι ίσα, δηλαδή $\Theta\Delta = \Theta'\Delta'$.

ii. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΕ και $A'B'E'$:

$$\left.\begin{array}{l} 1.A = A'(Y) \\ 2.B = B'(Y) \\ 3.AB = A'B'(Y) \end{array}\right\} \overset{\Gamma-\Pi-\Gamma}{\Rightarrow} \text{Τα τρίγωνα είναι ίσα.}$$

Άρα, $BE = B'E'$ και από την προηγούμενη σύγκριση είναι $B\Theta = B'\Theta'$, Οπότε αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει $\Theta E = \Theta' E'$.

Β.



i. Το τμήμα ΕΜ στο τρίγωνο ΕΒΓ είναι συγχρόνως διάμεσος και ύψος, συνεπώς στο τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές. Έτσι, ΕΒ=ΕΓ(1).

ii. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΘΒΕ, ΖΓΕ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.EB = E\Gamma((1)) \\ 2.\Theta E = ZE(\text{Ε σημείο της διχοτόμου}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο πλευρές αντίστοιχα ίσες, μία προς μία, άρα είναι ίσα.

iii. Από την παραπάνω σύγκριση είναι: $Z\Gamma E = \Theta BE\,(2)$.

$$\text{Τότε:}\ \Theta BA = 180^\circ \Leftrightarrow \Theta BE + ABE = 180^\circ \overset{(2)}{\Leftrightarrow} Z\Gamma E + ABE = 180^\circ$$

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ