ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

217

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη: Συναρτήσεις- Όρια στο x_o **23-10-21**

<u>ΘΕΜΑ Α:</u>

Α1. Έστω δύο συναρτήσεις f και g με πεδίο ορισμού Α και Β αντίστοιχα. Τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g ; **(5 μον.)**

Α2. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο; **(4 μον.)**

Α3.Εστω συνάρτηση f που ορίζεται στο Α και είναι 1-1.Να δείξετε ότι:

- $f^{-1}(f(x)) = x,\ x \in A$ και • $f(f^{-1}(y)) = y,\ y \in f(A)$ **(6 μον.)**

Α4. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

1.Αν $f(x) = \ln x$ και $g(x)=e^{-x}$ τότε

i. $(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{x},\ x \in R^*$.

ii. $(f \circ g)(x) = -x,\ x \in R$.

2.Αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_o και υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ τότε $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)>0$.

3. Αν $0 \le f(x) \le 1$ κοντά στο μηδέν, τότε και $\lim\limits_{x \to x_o} (x^4 \cdot f(x)) = 0$.

4.Αν $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \ell_1$ και $\lim\limits_{x \to x_o} g(x) = \ell_2$ τότε και $\lim\limits_{x \to x_o} (f(x) \cdot g(x)) = \ell_1 \cdot \ell_2$

5.Αν για κάθε x κοντά στο 2 ισχύει $h(x) \le f(x) \le g(x)$, $\lim\limits_{x \to 2} h(x) = -6$, $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 8$ τότε $-6 \le \lim\limits_{x \to 2} f(x) \le 8$.

(5x1=5 μον.)

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ της οποίας η C_f διέρχεται απ' τα σημεία Α(1,3) και Β(0,2).

1. Βρείτε το είδος της μονοτονίας της f. **(3μον.)**

2. Λύστε την ανίσωση $f(f(x^2) - 3) > 2$. **(5μον.)**

Β2.

1.Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την $f(x)=e^{-x}-x$. **(6 μον.)**

2.Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2-1}+x^2<2$. **(6 μον.)**

3.Αν α<β να δείξετε ότι $\dfrac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\alpha-\beta}<e^{\alpha+\beta}$. **(5 μον.)**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^3-x}$ **2.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ **3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x^2-x}$ **(3x3=9 μον.)**

Γ2. Αν ισχύει $f^2(x)-2f(x)+\sigma\upsilon\nu^2 x\le 0$, για κάθε $x\in R$ να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$. **(7 μον.)**

Γ3. 1. Αν οι συναρτήσεις $f+g$ και $f-g$ έχουν όριο στο x_0 πραγματικό αριθμό, να δειχτεί ότι και οι f και g έχουν όριο στο x_0 πραγματικό αριθμό.

2. Αν στο x_0 υπάρχει το όριο της f και δεν υπάρχει το όριο της $f+g$, να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο της g.

(2x5=10 μον.)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:A\to R$ με Α=$[0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x)>2,\ \forall x\in A$
- $f^2(x)+3=4f(x)+x^2,\ \forall x\in A$

Δ1.Να δείξετε ότι $f(x)=2+\sqrt{x^2+1}$. **(6 μον.)**

Δ2.Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη. **(3 μον.)**

Δ3.Βρείτε την f^{-1}. **(6 μον.)**

Δ4.Να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται πάνω απ' την y=x. **(5 μον.)**

Δ5.Αν Μ σημείο της C_f , Μ' συμμετρικό του Μ ως προς την y=x και (ΜΜ΄)=$\sqrt{18}$, να βρείτε τα σημεία Μ και Μ΄. **(5 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

Α1, Α2, Α3 Θεωρία
Α4. 1i. Λ, ii.Σ, 2Λ, 3Λ, 4Σ, 5Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

1. Αφού 1>0 και $f(1)=3>f(0)=2$ και επί πλέον η f είναι γνησίως μονότονη , θα είναι γνησίως αύξουσα.

2. Είναι:

$$f(f(x^2)-3)>2 \Leftrightarrow f(f(x^2)-3)>f(0) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x^2)-3>0 \Leftrightarrow f(x^2)>f(1) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}$$
$$x^2>1 \Leftrightarrow x<-1 \text{ ή } x>1.$$

Β2.

1. Η f έχει πεδίο ορισμού το Α=R και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με $f'(x)=-e^{-x}-1<0$, άρα είναι γνησίως φθίνουσα.

2. Η ανίσωση $e^{x^2-1}+x^2<2$, ισοδύναμα γράφεται:

$$e^{x^2-1}+x^2-1<1 \Leftrightarrow e^{-(1-x^2)}-(1-x^2)<1 \Leftrightarrow f(1-x^2)<f(0) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}$$
$$1-x^2>0 \overset{\varepsilon\tau\varepsilon\rho}{\Leftrightarrow} -1<x<1.$$

3. Θα δείξουμε ότι: $\dfrac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\alpha-\beta}<e^{\alpha+\beta} \Leftrightarrow$

$$\frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\alpha-\beta}<e^{\alpha}\cdot e^{\beta} \overset{\cdot(\alpha-\beta<0)}{\Longleftrightarrow} \frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{e^{\alpha}\cdot e^{\alpha}}>\alpha-\beta \Leftrightarrow \frac{1}{e^{\alpha}}-\frac{1}{e^{\beta}}>\alpha-\beta$$
$$\Leftrightarrow e^{-\alpha}-e^{-\beta}>\alpha-\beta \Leftrightarrow e^{-\alpha}-\alpha<e^{-\beta}-\beta \Leftrightarrow f(\alpha)>f(\beta) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}$$

$\alpha<\beta$ που ισχύει.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = R - \{-1, 0, 1\}$ και

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^3-x}\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x(x+1)}=\frac{3}{2}.$$

2. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = [-3, 1) \cup (1, +\infty)$ και

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)\cdot(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)\cdot(\sqrt{x+3}+2)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\cdot(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}.$$

3. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = R - \{0, 1\}$ και

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{x-1}\right)=1\cdot(-1)=-1.$$

Γ2. Η σχέση $f^2(x)-2f(x)+\sigma\upsilon\nu^2 x\le 0$, ισοδύναμα, γράφεται:

$f^2(x)-2f(x)+1\le 1-\sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow (f(x)-1)^2\le \eta\mu^2 x \Leftrightarrow$

$0\le (f(x)-1)^2\le \eta\mu^2 x$.

Επειδή $\lim_{x\to 0}(\eta\mu^2 x)=\lim_{x\to 0}(0)=0$, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x\to 0}(f(x)-1)^2=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}(f(x)-1)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=1$.

Γ3. 1. Έστω ότι $\lim_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big)=k_1$ και $\lim_{x\to x_0}\big(f(x)-g(x)\big)=k_2$.

Τότε θέτουμε: $h(x)=f(x)+g(x)$ και $w(x)=f(x)-g(x)$

με $\lim_{x\to x_0} h(x)=k_1$ και $\lim_{x\to x_0} w(x)=k_2$. Επομένως,

$$\left.\begin{array}{l} h(x)=f(x)+g(x) \\ w(x)=f(x)-g(x) \end{array}\right\} \underset{(-)}{\overset{(+)}{\Leftrightarrow}} \left.\begin{array}{l} h(x)+w(x)=2f(x) \\ h(x)-w(x)=2g(x) \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{h(x)+w(x)}{2} \\ g(x)=\dfrac{h(x)-w(x)}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)+w(x)}{2} \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)-w(x)}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\dfrac{k_1+k_2}{2} \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\dfrac{k_1-k_2}{2} \end{array}\right\}$$

Άρα οι f και g έχουν όριο στο x_0 πραγματικό αριθμό.

2. Έστω ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=k_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=k_2$. Τότε θα είναι: $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=k_1+k_2$. Άτοπο εφόσον η $f+g$ δεν έχει όριο. Άρα η g δεν έχει όριο στο x_0 πραγματικό αριθμό.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Απ' την ισότητα $f^2(x)+3=4f(x)+x^2$ **(1)** έχουμε:

$$f^2(x)-4f(x)+4=x^2+1 \Leftrightarrow (f(x)-2)^2=x^2+1 \Leftrightarrow$$

$$|f(x)-2|=\sqrt{x^2+1} \overset{f(x)>2}{\Leftrightarrow} f(x)-2=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=2+\sqrt{x^2+1}.$$

Δ2.

Απ' την εξίσωση $f(x)=y \Leftrightarrow 2+\sqrt{x^2+1}=y \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=y-2 \overset{y\geq 2}{\Leftrightarrow}$

$x^2+1=(y-2)^2 \Leftrightarrow x^2=(y-2)^2-1 \overset{y\geq 3}{\Leftrightarrow} x=\sqrt{y^2-4y+3}$.

(η $x=-\sqrt{y^2-4y+3} \notin A$ και απορρίπτεται). Η εξίσωση έχει μοναδική λύση ως προς x για κάθε y, οπότε η f αντιστρέφεται.

Δ3. Η αντίστροφη της f είναι: $f^{-1}(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$, $x\geq 3$.

Δ4. Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x) > x \Leftrightarrow 2+\sqrt{x^2+1} > x$, που ισχύει γιατί $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| = x, \forall x \in A$.

Δ5. Αν $M(\alpha,\beta) \in C_f$ τότε το M' είναι το $M'(\beta,\alpha)$.

Αφού $(MM') = \sqrt{18} \Rightarrow \sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2} = \sqrt{18} \Leftrightarrow \sqrt{2}|\beta-\alpha| = 3\sqrt{2}$

άρα $|\beta-\alpha| = 3 \overset{\beta>\alpha}{\Leftrightarrow} \boxed{\beta-\alpha=3}$ **(1)**.

Αφού το $M(\alpha,\beta) \in C_f$ είναι

$\beta = 2+\sqrt{\alpha^2+1} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \alpha+3 = 2+\sqrt{\alpha^2+1} \Leftrightarrow \alpha+1 = \sqrt{\alpha^2+1} \overset{\alpha>-1}{\Leftrightarrow}$

$\alpha^2+2\alpha+1 = \alpha^2+1 \Leftrightarrow 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ οπότε β=3.

Άρα, $\boxed{M(0,3) \text{ και } M'(3,0)}$.