ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

216

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη:Συναρτήσεις-Ορια-Συνέχεια **25-9-21**

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1.Να δείξετε ότι για μια πολυωνυμική συνάρτηση P ισχύει $\lim_{x \to x_o} P(x) = P(x_o)$. **(μον.5)**

Α2.Εστω P και Q πολυώνυμα του x.Αν $Q(x_o) \neq 0$ να δείξετε ότι $\lim_{x \to x_o} \frac{P(x)}{Q(X)} = \frac{P(x_o)}{Q(x_o)}$. **(μον.3)**

Α3.Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]; **(μον.3)**

Α4.Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να δώσετε τη γραφική του ερμηνεία. **(μον.4)**

Α5.Να σημειώσετε το Σωστό (Σ) η το Λάθος (Λ) στις προτάσεις:

α)Αν f, g δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α και Β αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$. Σ Λ

β)Για οποιαδήποτε συνάρτηση $f: R \to R$, με $\lim_{x \to x_o} f(x) > 0$, ισχύει ότι f(x)>0 , $\forall x \in R$. Σ Λ

γ)Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής στο x_o του πεδίο ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο x_o. Σ Λ

δ)Κάθε 1-1 συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ έχει το πολύ μία ρίζα σ' αυτό. Σ Λ

(μον.8)

Α6.Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **δ)** **(μον.2)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to R$ με τύπο $f(x)=\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$ και η συνάρτηση $g:[0,+\infty)\to R$ με τύπο με τύπο $g(x)=\sqrt{x}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφή της είναι η συνάρτηση $f^{-1}(x)=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$, x<0. **(μον.8)**

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h=g\circ f^{-1}$ είναι η $h(x)=\dfrac{x-1}{x}$, $x<0$. **(μον.6)**

Β3. Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)$ και $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x)$. **(μον.6)**

Β4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^{-h(x)}\cdot ημ\dfrac{1}{x}\right)$, όπου h είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Β2. **(μον.5)**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αν για κάθε x>0 ισχύει $4\sqrt{x}\le f(x)\le x+4$ να βρεθούν τα:

1) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ **2)** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-8}{x-4}$

3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-8}{\sqrt{x+5}-3}$ **4)** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{|f(x)-5|-3}{x^2-5x+4}$

(μον.16)

Γ2. Να βρεθεί, αν υπάρχει, το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2+4x+1}-\sqrt{x^2+2}\right)$, αν α<0. **(μον.5)**

Γ3. Βρείτε το όριο το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2-ημ2x}{x^2+100}$. **(μον.4)**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αν $f(x)=\dfrac{|16-x^2|}{x^2-16}-1$, να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια στα σημεία $x_o=4$ και $x_o=-4$. **(μον.5)**

Δ2. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στη θέση $x_o=2$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt{x+7}-3\right)f(x)-x+2}{ημ(x-2)}=-1$ να βρείτε την τιμή f(2). **(μον.5)**

Δ3. Έστω f συνεχής στο R με f(3)=5 και 2, 6 δύο διαδοχικές της ρίζες

Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5\cdot f(4)+(f(4)-6)\cdot x^2+3}{x^4-3f(4)\cdot x^2+2}$. **(μον.5)**

Δ4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$ και $g(x)=-x^2-x$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της h(x)=x+1 βρίσκεται πάνω από την C_g, για $x\neq-1$. **(μον.2)**

β) Να αποδείξετε ότι f(x)>g(x), για κάθε $x\in R$. **(μον.3)**

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(x-1)-x}{x-k}+\dfrac{f(x)-g(x)}{x-k-1}=0,\ k\neq1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (κ,κ+1). **(μον.5)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

Α1, Α2, Α3, Α4 Θεωρία

Α5. Λ, Λ, Λ, Σ

Α6. Εστω ότι η f έχει τουλάχιστον δύο ρίζες $x_1 \neq x_2$.Θα είναι τότε $f(x_1) = f(x_2) = 0$ που είναι άτοπο μιας και η f είναι 1-1.

ΘΕΜΑ Β

Β1.Απ' την εξίσωση $f(x) = y$ έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{1-\sqrt{x}} = y \overset{y<0}{\Leftrightarrow} y - y\cdot\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow y\cdot\sqrt{x} = y-1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{y-1}{y}$$

$$\Leftrightarrow x = \left(\frac{y-1}{y}\right)^2. \text{ Πρέπει } \; x > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{y-1}{y}\right)^2 > 1 \Leftrightarrow (y-1)^2 > y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; -2y+1 > 0 \Leftrightarrow y < \frac{1}{2}.$$

Αρα πρέπει y<0 οπότε η f έχει σύνολο τιμών το f(A)= $(-\infty, 0)$.
Η εξίσωση λοιπόν f(x)=y έχει μοναδική λύση ως προς x για κάθε y<0.
Επομένως η f είναι 1-1άρα αντιστρέφεται και η αντίστροφη έχει πεδίο ορισμού το $A_{f^{-1}} = f(A) = (-\infty, 0)$ και τύπο $f^{-1}(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2$.

Β2.Η $h = g \circ f^{-1}$ ορίζεται για τα $x \in A_{f^{-1}}$ και $f^{-1}(x) \in A_g$ δηλ. x<0 και $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 \geq 0$ άρα x<0 και έχει τύπο $h(x) = (g \circ f^{-1})(x) =$

$$= g(f^{-1}(x)) = \sqrt{\left(\frac{x-1}{x}\right)^2} = \left|\frac{x-1}{x}\right| = \frac{x-1}{x}, x < 0.$$

B3.Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x-1}{x} = -\dfrac{1}{0^-} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x-1}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{x} = 1$.

B4.Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = +\infty$ θα είναι και $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{-h(x)} = 0$.

Είναι τώρα: $-1 \le \eta\mu\dfrac{1}{x} \le 1 \overset{\cdot(e^{-h(x)}>0)}{\Longleftrightarrow} -e^{-h(x)} \le e^{-h(x)}\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x} \le e^{-h(x)}$ και

σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^{-h(x)}\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=0$.

ΘΕΜΑ Γ

Α1. 1.Εχουμε ότι $4\sqrt{x} \le f(x) \le x+4$, για κάθε x>0 και

$\lim\limits_{x\to 4} 4\sqrt{x} = 8$, $\lim\limits_{x\to 4}(x+4) = 8$ και σύμφωνα με το κριτήριο

παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 8$.

2.Απ΄την σχέση $4\sqrt{x} \le f(x) \le x+4$ (1) έχουμε:

- Αν x<4 $\Leftrightarrow 4\sqrt{x}-8 \le f(x)-8 \le x-4 \overset{x-4<0}{\Longleftrightarrow} \dfrac{4\sqrt{x}-8}{x-4} \ge \dfrac{f(x)-8}{x-4} \ge 1$

  και σύμφωνα με το κ.π. είναι και $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{f(x)-8}{x-4} = 1$.

- Αν x>4 $\Leftrightarrow 4\sqrt{x}-8 \le f(x)-8 \le x-4 \overset{x-4>0}{\Longleftrightarrow} \dfrac{4\sqrt{x}-8}{x-4} \le \dfrac{f(x)-8}{x-4} \le 1$

  και σύμφωνα με το κ.π. είναι και $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{f(x)-8}{x-4} = 1$.

3.Είναι: $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{f(x)-8}{\sqrt{x+5}-3} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(f(x)-8)\cdot(\sqrt{x+5}+3)}{(\sqrt{x+5}-3)\cdot(\sqrt{x+5}+3)} =$

$= \lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{f(x)-8}{x-4}\cdot(\sqrt{x+5}+3)\right) = 1\cdot 6 = 6$.

4.Είναι: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{|f(x)-5|-3}{x^2-5x+4}\overset{f(x)-5>0}{=\!=\!=\!=\!=}\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-5-3}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{f(x)-8}{x-4}\cdot\dfrac{1}{x-1}\right)=$

$=1\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$.

Γ2.Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha x^2+4x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha x^2)=\alpha\cdot(+\infty)=-\infty$ άρα $\alpha x^2+4x+1<0$ σε περιοχή του $+\infty$. Το ζητούμενο όριο λοιπόν δεν είναι καλά ορισμένο.

Γ3.Εχουμε: $-1\le \eta\mu 2x\le 1\Rightarrow -\dfrac{1}{x^2}\le\dfrac{\eta\mu 2x}{x^2}\le\dfrac{1}{x^2}\overset{\kappa.\pi.}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu 2x}{x^2}=0$.

Για το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2-\eta\mu 2x}{x^2+100}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\dfrac{\eta\mu 2x}{x^2}}{1+\dfrac{100}{x^2}}=\frac{5-0}{1+0}=5.$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=R-\{-4,4\}$ άρα δεν έχει νόημα η μελέτη της συνέχειας στις θέσεις -4 και 4.

Δ2.Αφού η f είναι συνεχής στο $x_o=2$ θα είναι $f(2)=\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

Εχουμε: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt{x+7}-3\right)f(x)-x+2}{\eta\mu(x-2)}=$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{\left(\sqrt{x+7}-3\right)\cdot\left(\sqrt{x+7}+3\right)\cdot f(x)}{\eta\mu(x-2)\cdot\left(\sqrt{x+7}+3\right)}-\frac{x-2}{\eta\mu(x-2)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{x-2}{\eta\mu(x-2)}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{x+7}+3\right)}\cdot f(x)-\frac{x-2}{\eta\mu(x-2)}\right]=$$

$$=1\cdot\frac{1}{6}\cdot f(2)-1=-1 \text{ άρα } f(2)=0.$$

Δ3. Επειδή η f είναι συνεχής με διαδοχικές ρίζες το 2 και 6, δεν μηδενίζεται στο διάστημα (2,6). Θα διατηρεί επομένως πρόσημο σ΄αυτό,
Αφού f(3)=5>0 το πρόσημό της είναι θετικό, άρα f(4)>0.

Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5\cdot f(4)+(f(4)-6)\cdot x^2+3}{x^4-3f(4)\cdot x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5\cdot f(4)}{x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}f(4)\cdot x=$

$=f(4)\cdot(+\infty)=+\infty$.

Δ4.α) Αρκεί να είναι

$h(x)>g(x)\Leftrightarrow x+1>-x^2-x\Leftrightarrow x^2+2x+1>0\Leftrightarrow(x+1)^2>0$

που ισχύει για κάθε $x\neq-1$.

β Ξέρουμε ότι $f(x)=e^x\geq x+1$ για κάθε $x\in R$ με την ισότητα να ισχύει για x=0. Σύμφωνα και με το α) ερώτημα έχουμε ότι

$f(x)\geq x+1\geq h(x)$ ή $e^x\geq x+1\geq-x^2-x$ με τις ισότητες να πραγματοποιούνται για διαφορετικές τιμές του x.

Άρα $f(x)>g(x),\forall x\in R$.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$H(x)=(x-k-1)[f(x-1)-x]+(x-k)[f(x)-g(x)]\ ,x\in R$.

- Η H είναι συνεχής στο [κ,κ+1]
- $H(k+1)=f(k+1)-g(k+1)>0$, απ' το β) ερώτημα.
- $H(k)=k-f(k-1)=k-e^{k-1}<0$, γιατί $e^x>x+1,\ x\neq1$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano η H , άρα και η δοθείσα εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (κ,κ+1).