

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

215

Γ' Λυκείου

29-5-21

Ον/μο:.....

Ύλη: Παράγωγοι-Συναρτήσεις

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$. (μον.4)

A2. Πότε μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται 1-1; (μον.4)

A3. Πότε και πως ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f σ' ένα σημείο της $A(x_0, f(x_0))$; (μον.3)

A4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Δύο ίσες συναρτήσεις f και g έχουν ίδιο τύπο».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθές, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδές. (μον.1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α). (μον.3)

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη.

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

γ) Αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f , τότε το σημείο

$M\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} .

δ) $(\ln |x|)' = -\frac{1}{x}, x < 0$.

ε) Για κάθε συνάρτηση f , το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα της f , εφόσον υπάρχουν, είναι το ολικό μέγιστο της f . (μον.10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$f(0) = \frac{1}{2}$ και $e^x \cdot f'(x) = f(x) - f'(x), \forall x \in \mathbb{R}$

B1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}, x \in \mathbb{R}$. (μον.4)

B2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} . (μον.4)

B3. Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x)) > \frac{\sqrt{e}}{1+\sqrt{e}}$. (μον.2)

B4. Αν $g(x) = \ln x$, να δείξετε ότι $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. (μον.5)

B5. α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in \mathbb{R}$. (μον.3)

β) Αν $F(0) = \ln 2$ βρείτε συνάρτηση F ώστε $F'(x) = f(x) - x$. (μον.4)

γ) Να βρείτε το πρόσημο των τιμών της F' . (μον.3)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \ln x, x > 0$.

Γ1. Να δείξετε ότι: $2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0, \forall x > 0$. (μον.6)

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$. (μον.4)

Γ3. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ τέτοιο ώστε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ να είναι σημείο καμπής της C_f . (μον.6)

Γ4.α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f . (μον.4)

β) Να υπολογίσετε, συναρτήσει του x_0 , το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές το σημείο $B(x_0, 0)$ και τα σημεία τομής της εφαπτομένης της C_f στο $x_1=1$ με τους άξονες. (μον.3)

γ) Υπάρχει ενδεχόμενο το εμβαδό του παραπάνω τριγώνου να είναι ίσο με το εμβαδό του τριγώνου που έχει κορυφές το B , το O και το σημείο που η εφαπτομένη της C_f τέμνει τον $y'y$; (μον.2)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$.

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (μον.5)

Δ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (μον.5)

Δ3. α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. (μον.4)

β. Στο διάστημα $(0, +\infty)$, να λύσετε την ανίσωση:

$$f(2x^2) + 2f(x+2) \leq f(2x+4) + 2f(x^2). \quad (\text{μον.6})$$

Δ4. Ένα υλικό σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$, $\alpha > 0$ κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $\frac{3}{e} \text{ cm / sec}$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M με τον άξονα $x'x$, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία η τετμημένη του σημείου M είναι 1 cm. (μον.5)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ