ΤΕΣΤ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

117
Β' Λυκείου
Γεν. Παιδείας
10-09-21

Ον/μο:……………………….
Ύλη: Συστήματα

Θέμα 1^{o}:

Α. Πότε μία εξίσωση ονομάζεται γραμμική; **(15 μον.)**

Β. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** Σωστό ή **(Λ)** Λάθος τις παρακάτω προτάσεις :

i. Το γραμμικό σύστημα $\left.\begin{matrix} \alpha x+\beta y=0 \\ \alpha' x+\beta' y=0 \end{matrix}\right\}$ έχει πάντα λύση. **Σ Λ**

ii. Αν για το σύστημα $\left.\begin{matrix} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{matrix}\right\}$ ισχύει ότι $D=0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο . **Σ Λ**

iii. Το σύστημα $\begin{cases} xy=8 \\ x+y=6 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση. **Σ Λ**

iv. Το σύστημα $\begin{cases} x+y=2 \\ 5x+5y=15 \end{cases}$ είναι αδύνατο . **Σ Λ**

v. Αν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους έχει 2 λύσεις, τότε έχει άπειρο πλήθος λύσεων. **Σ Λ**

(5x2=10μον.)

Θέμα 2^{o}: Να λύσετε το σύστημα :

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{x-5}{2}+\dfrac{2y+1}{7}+2=0 \\ \dfrac{x+6}{3}-\dfrac{y-6}{2}=8 \end{matrix}\right\}$$

(25 μον.)

Θέμα 3^{o}: Να λύσετε το σύστημα:

$$\left.\begin{matrix} 2x+y+z=4 \\ x+2y-z=2 \\ x-y+2z=1 \end{matrix}\right\}$$

(25 μον.)

<u>Θέμα 4^{ο}:</u> Δίνεται το σύστημα: $\left.\begin{array}{l} x+(2\lambda-1)y=\lambda \\ \lambda x+y=\lambda \end{array}\right\}$.

Να λύσετε το σύστημα για τις διάφορες τιμές του λ.

(25 μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1ο:

Α. Κάθε εξίσωση της μορφής αx+βy=γ με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ ονομάζεται γραμμική.

Β. **i.**Σ **ii.**Λ **iii.** Λ **iv.**Σ **v.**Σ

Θέμα 2ο:

Έχουμε :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x-5}{2}+\frac{2y+1}{7}+2=0 \\ \frac{x+6}{3}-\frac{y-6}{2}=8 \end{array}\right\} \underset{\cdot 6}{\overset{\cdot 14}{\Leftrightarrow}} \left.\begin{array}{l} 14\cdot\frac{x-5}{2}+14\cdot\frac{2y+1}{7}+28=0 \\ 6\cdot\frac{x+6}{3}-6\cdot\frac{y-6}{2}=48 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 7(x-5)+2(2y+1)+28=0 \\ 2(x+6)-3(y-6)=48 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 7x-35+4y+2+28=0 \\ 2x+12-3y+18=48 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 7x+4y=5 \\ 2x-3y=18 \end{array}\right\} \underset{\cdot 4}{\overset{\cdot 3}{\Leftrightarrow}} \left.\begin{array}{l} 21x+12y=15 \\ 8x-12y=72 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{l} 29x=87 \\ 7x+4y=5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=3 \\ 21+4y=5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=-4 \end{array}\right\}$$

Άρα $(x,y)=(3,-4)$.

Θέμα 3ο: Είναι:

$$\left.\begin{array}{ll} 2x+y+z=4 & (1) \\ x+2y-z=2 & (2) \\ x-y+2z=1 & (3) \end{array}\right\}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε: 3x+3y=6 (4)

$$\left.\begin{array}{l} (1) \\ (3) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+y+z=4 \\ x-y+2z=1 \end{array}\right\} \overset{\cdot(-2)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{l} -4x-2y-2z=-8 \\ x-y+2z=1 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} -3x-3y=-7 \; (5)$$

Το σύστημα των (4) και (5) : $\left.\begin{matrix} x+y=2 \\ -3x-3y=-7 \end{matrix}\right\} \underset{:(-3)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{matrix} x+y=2 \\ x+y=\frac{7}{3} \end{matrix}\right\}$ είναι αδύνατο.

Οπότε και το αρχικό σύστημα είναι αδύνατο.

<u>Θέμα 4ο:</u>

Έχουμε το σύστημα : $\left.\begin{matrix} x+(2\lambda-1)y=\lambda \\ \lambda x+y=\lambda \end{matrix}\right\}$.

Θα βρούμε τις ορίζουσες του συστήματος . Είναι :

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2\lambda-1 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix}=1-\lambda(2\lambda-1)=1-2\lambda^2+\lambda=-\left(2\lambda^2-\lambda-1\right)=$$
$$-\left(\lambda^2+\lambda^2-\lambda-1\right)=-\left[\lambda(\lambda-1)+(\lambda-1)(\lambda+1)\right]=-(\lambda-1)(2\lambda+1)$$

$$D_x=\begin{vmatrix} \lambda & 2\lambda-1 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix}=\lambda-\lambda(2\lambda-1)=\lambda-2\lambda^2+\lambda=-2\lambda^2+2\lambda=$$
$$-2\lambda(\lambda-1)$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix}=\lambda-\lambda^2=\lambda(1-\lambda)$$

* Αν $D\neq 0 \Leftrightarrow -(\lambda-1)(2\lambda+1)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 1$ και $\lambda\neq -\frac{1}{2}$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την :

$$(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{-2\lambda(\lambda-1)}{-(\lambda-1)(2\lambda+1)},\frac{\lambda(1-\lambda)}{-(\lambda-1)(2\lambda+1)}\right)=\left(\frac{2\lambda}{2\lambda+1},\frac{\lambda}{2\lambda+1}\right).$$

* Αν $D=0 \Leftrightarrow -(\lambda-1)(2\lambda+1)=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ ή $\lambda=-\frac{1}{2}$ τότε:

→ Αν λ=1 το σύστημα γίνεται: $\left.\begin{matrix} x+y=1 \\ x+y=1 \end{matrix}\right\}$ δηλαδή έχει άπειρες λύσεις, της μορφής (x,y)=(x, 1-x), $x\in\mathbb{R}$.

$\rightarrow$ Αν $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ το σύστημα γίνεται: $\left.\begin{array}{l} x-2y=-\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2}x+y=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \underset{\cdot(-4)}{\overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}} \left.\begin{array}{l} 2x-4y=-1 \\ 2x-4y=2 \end{array}\right\}$,

δηλαδή το σύστημα είναι αδύνατο.