

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

28

Ον/μο:.....

Γ' Λυκείου(ΕΠΑ.Λ)

Υλη: Όλη η ύλη

29-05-21

Θέμα 1^ο:

- A.** Να δώσετε τον ορισμό της σχετικής συχνότητας f_i , της τιμής x_i μιας μεταβλητής X , σε μία στατιστική έρευνα. (6μον.)
- B.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και c ένας σταθερός αριθμός, να αποδείξετε ότι: $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$. (7μον.)
- Γ.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Για κάθε συνάρτηση f ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ».
- α.** Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα A , αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ , αν είναι ψευδής. (1 μον.)
- β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α). (3 μον.)
- Δ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- i.** Το εμβαδόν που σχηματίζει το πολύγωνο συχνοτήτων σε ένα ιστόγραμμα συχνοτήτων, με τον $x'x$, ισούται με το μέγεθος n του δείγματος.
- ii.** Το διάγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται μόνο σε ποιοτικές μεταβλητές.
- iii.** Αν στο x_0 η f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$, τότε η f , παρουσιάζει στο x_0 κατ' ανάγκη ακρότατο. (3x2=6 μον.)
- Ε.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε.
- i.** $(\sqrt{x})' = \dots\dots\dots$
- ii.** Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \dots\dots\dots$ (2x1=2 μον.)

Θέμα 2^ο:

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας:

κλάσεις	xi	vi	fi	Fi%
[17,)				20
[,25)		20		60
[,)				80
[,)				
[,)			0,05	
ΣΥΝΟΛΟ	-			-

- A. Να συμπληρώσετε τον πίνακα. (8 μον.)
- B. Κατασκευάστε το ιστόγραμμα και το αντίστοιχο πολύγωνο συχνοτήτων. (5 μον.)
- Γ. Κατασκευάστε το ιστόγραμμα και το αντίστοιχο πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις % . (5 μον.)
- Δ. Να βρείτε το πλήθος των παρατηρήσεων με τιμή τουλάχιστον 19 και το πολύ 28. (7 μον.)

Θέμα 3^ο:

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{1-x^2}{x}$.

- A. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της, και στη συνέχεια ότι:
 $f(2018) + f(2020) > f(2019) + f(2021)$. (7 μον.)
- B. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_f και C_g , στα σημεία τους με τετμημένη $x_0 = 1$ είναι κάθετες μεταξύ τους. (6 μον.)
- Γ. Για τη συνάρτηση $h(x) = g(x) - \frac{x}{2}$, με $x \in (0, +\infty)$, να δείξετε ότι $h(x) \leq \frac{1}{2}$ για κάθε $x > 0$. (4 μον.)

Δ. Αν ισχύει ότι: $\alpha = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{h(x)}$, να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα συμπληρωμένο.

x_i	v_i	f_i	N_i	$F_i\%$
x_1	α	0, 16		
x_2			12	
x_3				88
x_4				
Σύνολο				

(8 μον.)

Θέμα 4^ο:

Το Νοέμβριου του 2020 στη Θεσσαλονίκη, παρουσιάστηκε έξαρση στα κρούσματα του ιού SARS COVID19. Ο πληθυσμός της πόλης, που προσβλήθηκε για 30 ημέρες, δίνεται από τη συνάρτηση:

$$P(t) = -t^2 + 40t + 30, \quad t \in [1, 30] .$$

t: χρόνος σε ημέρες

P: πληθυσμός σε άτομα

A.i. Πόσα ήταν τα κρούσματα στη 1 Νοεμβρίου;

ii. Πόσα ήταν τα κρούσματα στις 30 Νοεμβρίου;

(6 μον.)

B. Ποια μέρα του Νοεμβρίου παρουσιάστηκαν τα περισσότερα κρούσματα; (το «πικ» του ιού)

(8 μον.)

Γ. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του πλήθους των κρουσμάτων, στις 10 Νοεμβρίου.

(6 μον.)

Δ. Αν στις 5 Νοεμβρίου, διενεργήθηκαν στη Θεσσαλονίκη 2050 τεστ, να βρείτε τη σχετική συχνότητα (το δείκτη θετικότητας) των ανθρώπων που έμαθαν ότι νόσησαν, εκείνη την ημέρα, ως προς το πλήθος των τεστ.

(5 μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(Ενδεικτικές)

Θέμα 1^ο:

A. Σχ. Βιβλίο

B. Σχ. Βιβλίο

Γ. α. Ψευδής

β. Η πρόταση αυτή ισχύει μόνο όταν η f είναι συνεχής στο x_0 .

Δ. i. Σ ii. Λ iii. Λ

E. i. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$.

ii. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{k}, k \geq 0$.

Θέμα 2^ο:

A.

κλάσεις	xi	vi	fi	Fi%
[17, 21)	19	10	0,2	20
[21, 25)	23	20	0,4	60
[25, 29)	27	10	0,2	80
[29, 33)	31	7,5	0,15	95
[33, 37)	35	2,5	0,05	100
ΣΥΝΟΛΟ	-	50	1	-

Είναι $17 + c + c = 25 \Leftrightarrow 2c = 8 \Leftrightarrow c = 4$. Για τα κέντρα των κλάσεων

είναι $x_i = \frac{\alpha + \beta}{2}$, όπου α και β είναι τα άκρα κάθε κλάσης.

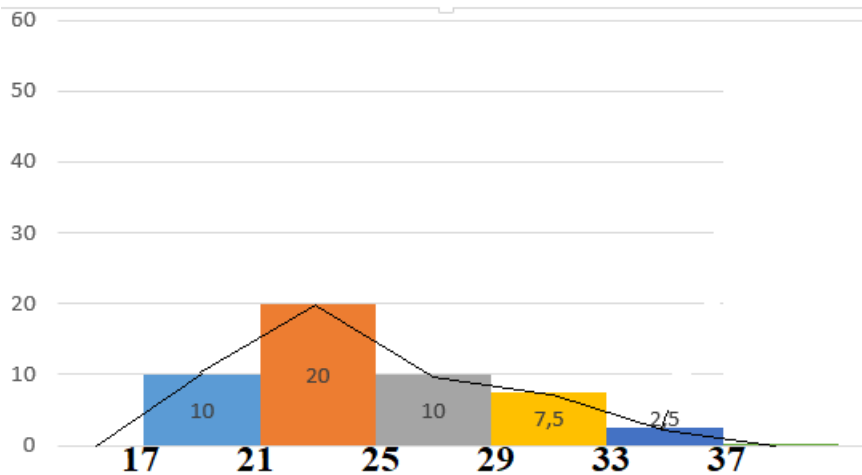
$f_2\% = F_2\% - F_1\% = 60 - 20 = 40\%$, οπότε $f_2 = 0,4$. Όμως,

$f_2 = \frac{v_2}{v} \Leftrightarrow 0,4 = \frac{20}{v} \Leftrightarrow 0,4v = 20 \Leftrightarrow v = 50$. Τότε, $f_1 = 0,2$ και

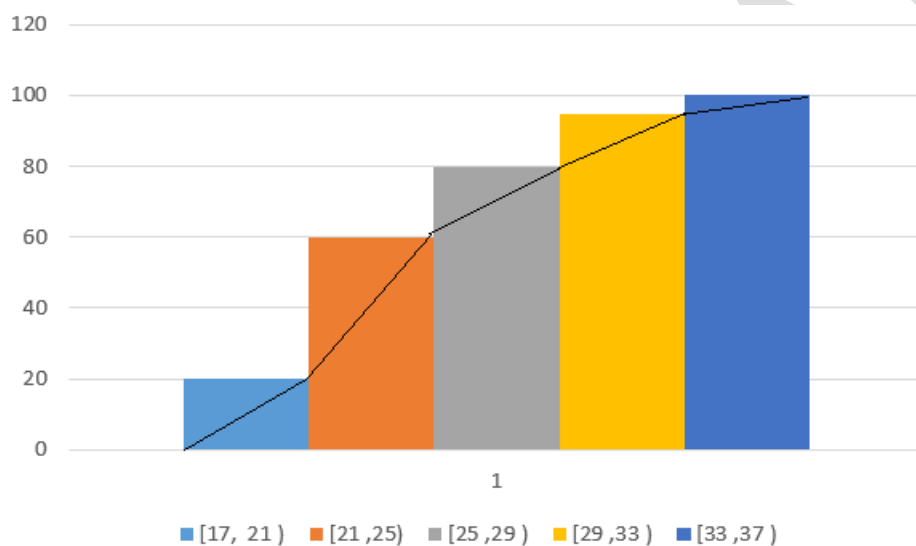
$f_1 = \frac{v_1}{v} \Leftrightarrow v_1 = 10$. $f_3\% = F_3\% - F_2\% = 80 - 60 = 20\%$ και $f_3 = 0,2$

$f_3 = \frac{v_3}{v} \Leftrightarrow v_3 = 10$, $f_4 = 1 - (0,2 + 0,4 + 0,2 + 0,05) = 0,15$ και $v_4 = 7,5$

Β.



Γ.



Δ. Το πλήθος των παρατηρήσεων με τιμή τουλάχιστο 19 και το πολύ 28

$$\text{είναι: } \frac{v_1}{2} + v_2 + \frac{3}{4}v_3 = \frac{10}{2} + 20 + \frac{3}{4} \cdot 10 = 32,5$$

Θέμα 3^ο :

A. Για να ορίζεται η $f(x) = \frac{1-x^2}{x}$, πρέπει $x \neq 0$. Οπότε $A_f = \mathbb{R}^*$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, ως ρητή πολυωνυμική

$$\text{με } f'(x) = \frac{(1-x^2)' \cdot x - (1-x^2) \cdot (x)'}{x^2} = \frac{-x^2 - 1}{x^2} \leq 0, x \neq 0.$$

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A . Τότε:

$$2018 < 2019 \Leftrightarrow f(2018) > f(2019) \Bigg\} \begin{matrix} (+) \\ \Leftrightarrow \end{matrix}$$

$$2020 < 2021 \Leftrightarrow f(2020) > f(2021) \Bigg\} \Leftrightarrow$$

$$f(2018) + f(2020) > f(2019) + f(2021)$$

B. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο

με τετμημένη $x=1$ είναι $\lambda_1 = f'(1) = -2$. Για την $g(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$,

έχουμε ότι είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, οπότε ο

συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_g στο σημείο

με τετμημένη $x=1$ είναι: $\lambda_2 = g'(1) = \frac{1}{2}$. Παρατηρούμε ότι:

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = (-2) \cdot \frac{1}{2} = -1$, οπότε οι εφαπτομένες τους στο σημείο αυτό είναι κάθετες.

Γ. Η $h(x) = g(x) - \frac{x}{2} = \sqrt{x} - \frac{x}{2}$, $x \geq 0$ είναι παραγωγίσιμη με

$$h'(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}. \text{ Λύνουμε την εξίσωση } h'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Ο πίνακας προσήμων της h' είναι:

x	0	1	$+\infty$
h'		+	-
h		↗	↘

Επομένως η h παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=1$ το $h(1) = \frac{1}{2}$,

οπότε θα είναι $h(x) \leq \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

$$\begin{aligned} \Delta. \text{ Είναι: } \alpha &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{\sqrt{x} - \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{\frac{2\sqrt{x}-x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(4-x)}{2\sqrt{x}-x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(4-x)(2\sqrt{x}+x)}{(2\sqrt{x}-x)(2\sqrt{x}+x)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(4-x)(2\sqrt{x}+x)}{4x-x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(4-x)(2\sqrt{x}+x)}{x(4-x)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(2\sqrt{x}+x)}{x} = 4 \end{aligned}$$

Τότε συμπληρώνουμε τον πίνακα:

x_i	v_i	f_i	N_i	$F_i\%$
x_1	4	0,16	4	16
x_2	8	0,32	12	48
x_3	10	0,4	22	88
x_4	3	0,12	25	100
Σύνολο	25	1		

Όπου $f_i = \frac{v_i}{v}$, $N_1 = v_1$, $N_2 = N_1 + v_2$, κ.ο.κ. ,

$F_1\% = f_1\%$, $F_2\% = F_1\% + f_2\%$, κ.ο.κ.

Θέμα 4^ο:

A. Τα κρούσματα στη 1 Νοεμβρίου ήταν: $P(1) = -1^2 + 40 + 30 = 69$
και στις 30 Νοεμβρίου ήταν $P(30) = -30^2 + 1200 + 30 = 330$.

B. Η $P(t) = -t^2 + 40t + 30$, $t \in [1, 30]$, είναι παραγωγίσιμη ως
πολυωνυμική με $P'(t) = (-t^2 + 40t + 30)' = -2t + 40$. Λύνουμε
την εξίσωση $P'(t) = 0 \Leftrightarrow -2t + 40 = 0 \Leftrightarrow t = 20$. Ο πίνακας
προσήμων της P' είναι:

x	1	20	30
P'	+	-	
P	↗	↘	

Τα περισσότερα κρούσματα εμφανίστηκαν στις 20 Νοεμβρίου.

Γ. Ο ρυθμός μεταβολής των κρουσμάτων είναι $P'(t) = -2t + 40$.

Για $t=10$ ο ρυθμός είναι $P'(10) = -20 + 40 = 20$ κρούσματα/ημέρα.

Δ. Τα άτομα που νόησαν στις 5 Νοεμβρίου είναι :

$P(5) = -5^2 + 200 + 30 = 205$. Τότε εφόσον διενεργήθηκαν 2050

τεστ, ο ρυθμός θετικότητας, θα είναι: $\frac{205}{2050} = 0,10 = 10\%$.