

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

214

Ον/μο:.....

Γ' Λυκείου

Υλη:Ολη

5-5-21

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση $f:(0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε $f(x)-f(y)=f\left(\frac{x}{y}\right)$

για κάθε $x,y>0$. Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα, τότε:

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$. (μον.5)

2. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2+3)+f(x)=f(x^2+1)+f(x+1)$ (μον.5)

3. Αν ακόμη είναι $f(x)>0$ για κάθε $x>1$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. (μον.5)

A2. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ και:

1. $f(\alpha+\beta)=f(\alpha) \cdot f(\beta)+\alpha\beta$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(x)-f(1)}{x-1} = 7$.

Να βρείτε το $f(2)$. (μον.5)

A3. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha\sqrt{x+3} + \beta\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})$. (μον.5)

ΘΕΜΑ Β

B1. Έστω η $f:(1,2) \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής, γνησίως αύξουσα, $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)-3}{x-2} = 2$

και $2\eta\mu(x-1) \leq (x-1) \cdot f(x) \leq x^2-1, \forall x \in (1,2)$.

1. Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$. (μον.4)

2. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της $h(x) = f(x) - \frac{1}{x-1} + 1$. (μον.4)

3. Να δείξετε ότι C_g της $g(x) = \frac{1}{f(x)+1}$ έχει με την $\varepsilon: y = x-1$

μόνο ένα κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1,2)$. (μον.4)

B2. Η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Αν οι αριθμοί α, β είναι ρίζες της εξίσωσης $2x^2 - 432x + 2007 = 0$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ ώστε :

$$\frac{\alpha}{2}f(\alpha) + \frac{\alpha + \beta}{3}f\left(\frac{2\alpha + 3\beta}{5}\right) + \frac{\beta}{2}f(\beta) = 180f(\xi).$$

(μον.6)

B3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$f(2) + f(6) < 10 < f(3) + f(5)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν α, β στο $\mathbb{R}$ με $\alpha + \beta = 8$ τέτοιοι ώστε $f(\alpha) + f(\beta) = 10$.

(μον.7)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται η $f(x) = \sin x$, $x \in \Delta = (0, \pi)$. Δείξτε ότι:

1. η f είναι αντιστρέψιμη.

(μον.3)

2. η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ και ότι

$$\left[f^{-1}(x) \right]' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(μον.7)

Γ2. Να προσδιοριστεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η C_f της $f(x) = \frac{1}{4}(\alpha x - x^3)$ να

τέμνει τον $x'x$ υπό τη γωνία $\omega = \frac{\pi}{4}$ (δηλ. στα σημεία που η C_f

τέμνει τον $x'x$ η εφαπτομένη της να σχηματίζει γωνία $\omega = \frac{\pi}{4}$). (μον.8)

Γ3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 16\text{cm}$ και ύψος $AD = 8\text{cm}$.

Εγγράφουμε ορθογώνιο $KLMN$ με την πλευρά KL στη $B\Gamma$ και τις κορυφές M και N στις πλευρές AG και AB αντίστοιχα.

Αν το ύψος $NK = x$ του ορθογωνίου αυξάνεται να βρεθεί τότε το εμβαδόν του ορθογωνίου αυξάνεται και τότε ελαττώνεται.

(μον.7)

ΘΕΜΑ Α

Δ1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2^x + 3^x + 5^x - 3$ και $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x > 0 \\ \ln 30, & x = 0 \end{cases}$

1. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και $2^{\sqrt{3}} + 3^{\sqrt{3}} + 5^{\sqrt{3}} < 38$. (μον.3)
2. Δείξτε ότι η g είναι συνεχής. (μον.3)
3. Μελετήστε τη μονοτονία της g . (μον.3)
4. Αν $x_1, x_2 > 0$ δείξτε ότι $f(x_1) + f(x_2) < f(x_1 + x_2)$. (μον.3)
5. Λύστε την εξίσωση $f(x^2 + 2) + f(x + 2) = f(x^2) + f(x + 4)$. (μον.3)

Δ2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, με $f'(x) + f'(-x) = 0$ για κάθε $x \in [-2, 2]$ και $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-2, 2)$. Να δείξετε ότι :

1. Η f είναι άρτια. (μον.3)
2. Η εξίσωση $f'(x) = 0$, έχει μοναδική λύση στο $(-2, 2)$. (μον.3)
3. Υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(2) = 2f''(2x_0)$. (μον.4)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ