ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

111
Β' Λυκείου
Γεν. Παιδείας
10-02-18

Ον/μο:……………………….

Ύλη: Συστήματα –Ιδιότητες Συναρτήσεων- Τριγωνομετρία - Πολυώνυμα

<u>Θέμα 1ο:</u>

Α.i. Πότε μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέγεται άρτια; **(5 μον.)**

ii. Να αποδείξετε ότι ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x-ρ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου. **(10 μον.)**

Β. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι $f(x) \le 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο ίσο με 5. **Σ Λ**

ii. Υπάρχει γωνία ω για την οποία ισχύει ημω-συνω=2. **Σ Λ**

iii. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) = x^4 - 2x^3 + 7x - 9$ με το x-1 είναι ίσο με -3 . **Σ Λ**

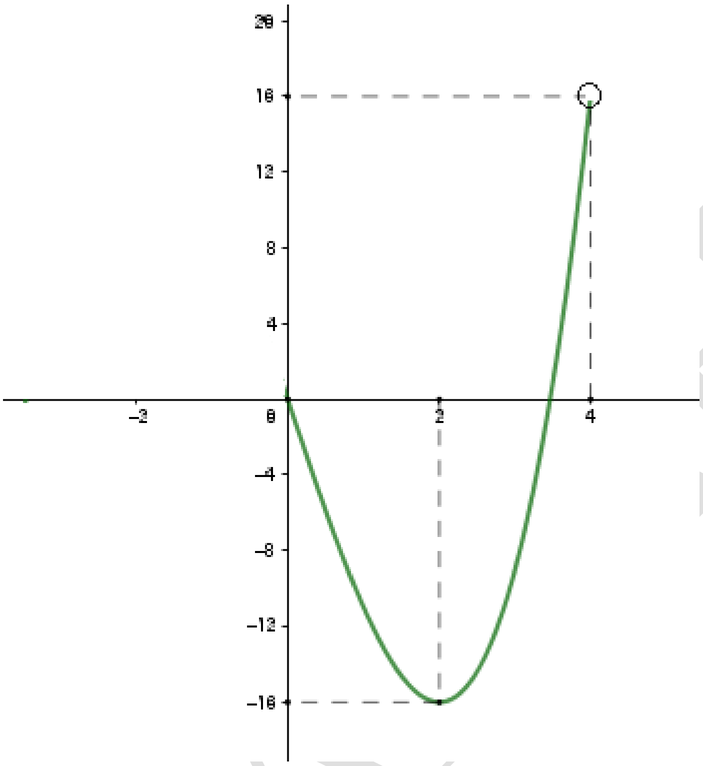
iv. Ο σταθερός όρος του πολυωνύμου: $P(x) = (3x^2 - 9x + 1)^{2018} + 4$ ισούται με 5. **Σ Λ**

v. $συν2α = ημ^2 2α - 1$. **Σ Λ**

(5x2=10 μον.)

<u>Θέμα 2^{ο}:</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^3-\kappa x$ με $x\in(-4,4)$ και $\kappa\in\mathbb{R}^*$, η οποία διέρχεται από το σημείο Α(2,-16) και τμήμα της γραφικής της παράστασης φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Α. Να δείξετε ότι κ=12. **(5 μον.)**

Β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι περιττή στο $(-4,4)$. **(5 μον.)**

Γ. Να μεταφέρετε το σχήμα το γραπτό σας, συμπληρώνοντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. **(5 μον.)**

Δ. Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f και να βρείτε τα ακρότατα αυτής, καθώς και τις θέσεις τους. **(5 μον.)**

Ε. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x)+16,\ x\in(-4,4)$. **(5 μον.)**

Θέμα 3ο:

Α. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία ω για την οποία ισχύουν συγχρόνως ημω=1 και συνω=1. **(4 μον.)**

Β. Θεωρούμε γωνία α rad για την οποία ισχύουν: ημα=x_0 και συνα=y_0 , όπου (x_0,y_0) μία από τις λύσεις του συστήματος:

$$\left.\begin{array}{l} 10y^2 = 9x+1 \\ 9x-2y=7 \end{array}\right\}$$

i. Να λύσετε το παραπάνω σύστημα. **(8 μον.)**

ii. Να αποδείξετε ότι $ημα=\frac{3}{5}$, $συνα=-\frac{4}{5}$, $εφα=-\frac{3}{4}$ και $σφα=-\frac{4}{3}$. **(5 μον.)**

iii. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = ημ\left(α-\frac{π}{2}\right)\cdot συν(-α)-\frac{3}{5}\cdot συν\left(\frac{3π}{2}+α\right)+ημ^2\left(\frac{π}{2}-α\right)+συν^2\left(\frac{3π}{2}+α\right)$$

(8 μον.)

Θέμα 4ο:

Έστω το πολυώνυμο $P(x)=2x^5-3x^4-7x^3+(λ+6)x^2+7x+μ$ για το οποίο ισχύει ότι έχει παράγοντα το x και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x+1 είναι 3.

Α. Να δείξετε ότι λ=2 και μ=0. **(6 μον.)**

Β. Για λ=2 και μ=0:

i. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του P(x) με το x^2-2 . **(7 μον.)**

ii. Να βρείτε τα διαστήματα που η γραφική παράσταση του P(x) είναι πάνω από την ευθεία y=x+4. **(7 μον.)**

Γ. Έστω το πολυώνυμο:

$$Q(x)=2x^5+(2α+β)x^4-7x^3+(-3α+2β)x^2+(κ+6)x+κ-1$$

Να βρείτε τους αριθμούς α, β και κ ώστε P(x)=Q(x) για κάθε $x\in\mathbb{R}$. **(5 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1ο:

Α. i. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέγεται άρτια ,
όταν για κάθε $x \in A$
να ισχύει: α. $-x \in A$ και
β. $f(-x) = f(x)$

ii. $(\Rightarrow)$ Έστω ότι το x-ρ είναι παράγοντας του P(x). Τότε:

$$P(x) = (x-\rho)\pi(x)$$

Από την ισότητα αυτή για x=ρ παίρνουμε

$$P(\rho) = (\rho-\rho)\pi(\rho)=0,$$

που σημαίνει ότι το ρ είναι ρίζα του P(x).
$(\Leftarrow)$ Έστω ότι το ρ είναι ρίζα του P(x), δηλαδή ισχύει P(ρ)=0.
Τότε από τη σχέση

$$P(x) = (x-\rho)\pi(x)+P(\rho)$$

παίρνουμε $P(x) = (x-\rho)\pi(x)$,
που σημαίνει ότι το x-ρ είναι παράγοντας του P(x).

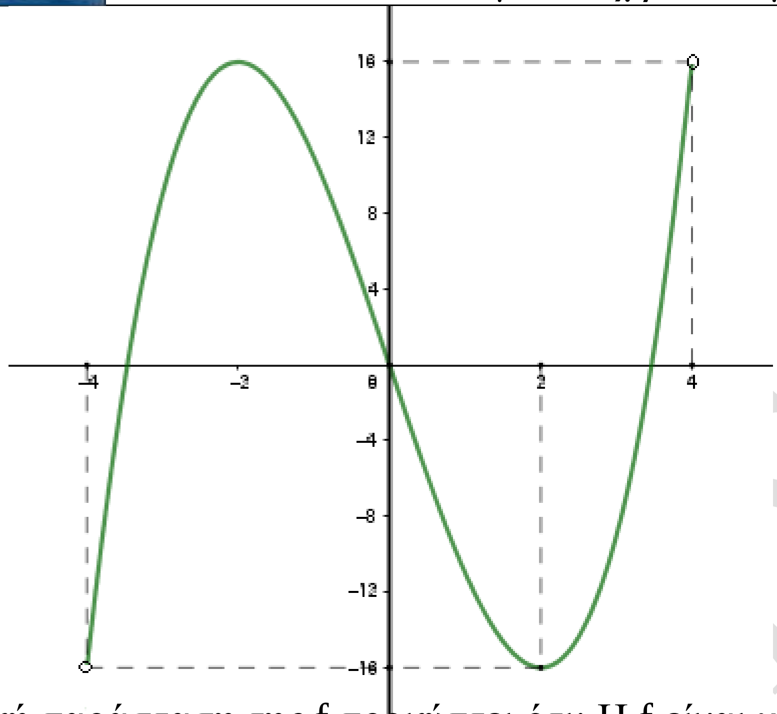
Β. i.Λ **ii.**Λ **iii.** Σ **iv.**Σ **v.**Λ

Θέμα 2ο:

Α. Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(2,-16)
ισχύει ότι: $f(2) = -16 \Leftrightarrow 8 - 2\kappa = -16 \Leftrightarrow -2\kappa = -24 \Leftrightarrow \kappa = 12$.
Άρα, $f(x) = x^3 - 12x,\ x \in (-4,4)$.

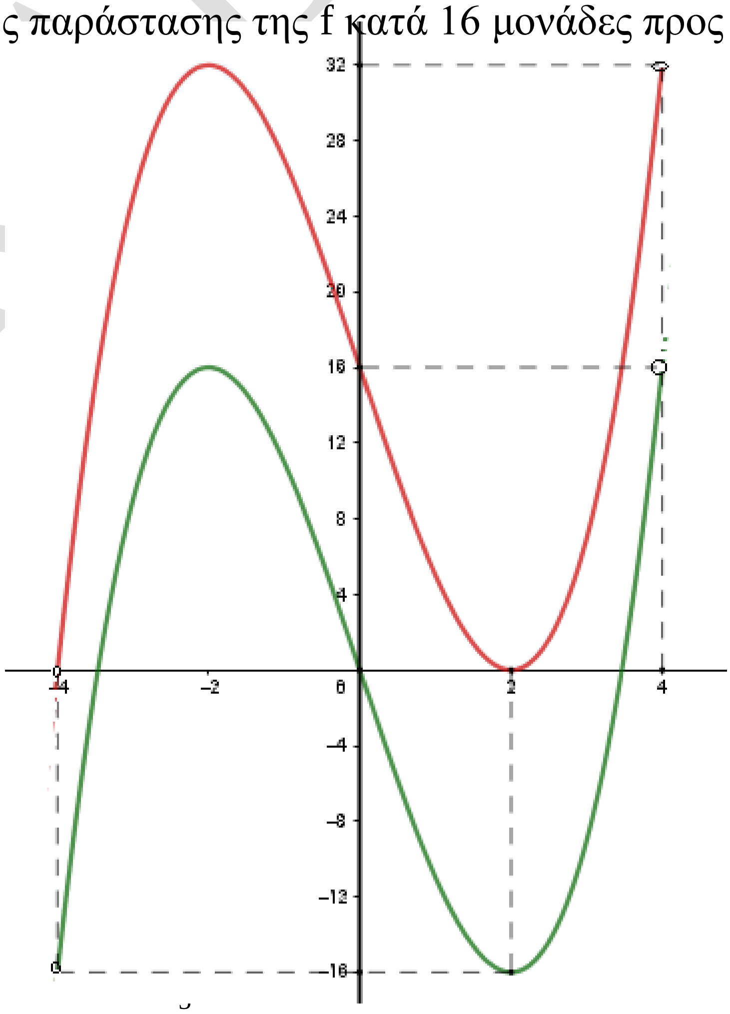
Β. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in (-4,4)$, ισχύει $-x \in (-4,4)$.
Επίσης, $f(-x) = (-x)^3 - 12(-x) = -x^3 + 12x = -f(x)$.
Επομένως, η f είναι περιττή.

Γ. Εφόσον η f είναι περιττή στο (-4,4) η γραφική της παράσταση θα έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.
Οπότε η γραφική παράσταση της f είναι:



Δ. Από τη γραφική παράσταση της f προκύπτει ότι: Η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-4,-2]$ και $[2,4)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2,2]$.Παρουσιάζει μέγιστο για x=-2 το f(-2)=16 και ελάχιστο για x=2 το f(2)=-16.

Ε. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από μία κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 16 μονάδες προς τα πάνω. Οπότε είναι:



Θέμα 3ο:

Α. Έστω ότι υπάρχει γωνία $\omega \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε ημω=συνω=1. Τότε σύμφωνα με τη γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ είναι $1^2 + 1^2 = 1 \Leftrightarrow 2 = 1$ άτοπο. Επομένως, δεν υπάρχει τέτοια γωνία ω.

Β. i. Είναι:

$$\left.\begin{aligned}10y^2 &= 9x+1\\ 9x-2y &= 7\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned}10y^2-9x-1&=0\\ 9x&=7+2y\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned}10y^2-7-2y-1&=0\\ 9x&=7+2y\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}10y^2-2y-8&=0\\ 9x&=7+2y\end{aligned}\right\} \overset{:2}{\Leftrightarrow} \left.\begin{aligned}5y^2-y-4&=0\\ 9x&=7+2y\end{aligned}\right\} \overset{\Delta=81>0}{\Leftrightarrow} \left.\begin{aligned}y=1 \text{ ή } y&=-\frac{4}{5}\\ 9x&=7+2y\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} y=1 \\ x=1 \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} y=-\dfrac{4}{5} \\ x=\dfrac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

ii. Σύμφωνα με το δεδομένα είναι ημα=x_0 και συνα=y_0, όπου (x_0,y_0), μία από τις λύσεις του παραπάνω συστήματος. Οπότε η πρώτη λύση απορρίπτεται εφόσον σύμφωνα με το Α ερώτημα δεν υπάρχει γωνία ω έτσι ώστε ημω=1 και συνω=1. Επομένως, είναι $\eta\mu\alpha = \frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{4}{5}$. Τότε: $\varepsilon\varphi\alpha = \dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \dfrac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\dfrac{3}{4}$ και $\sigma\varphi\alpha = -\dfrac{4}{3}$.

iii.

$$A = \eta\mu\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu(-\alpha) - \frac{3}{5}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) + \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$$

$$A = \eta\mu\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha - \frac{3}{5}\cdot\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha$$

$$A = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha - \frac{3}{5}\cdot\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha$$

$$A = -\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha - \frac{3}{5}\cdot\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha = -\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \frac{3}{5}\cdot\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha$$

$$A = -\left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} + 1 = -\frac{16}{25} - \frac{9}{25} + 1 = 0.$$

Θέμα 4ο:

Α. Εφόσον το πολυώνυμο $P(x)=2x^5-3x^4-7x^3+(\lambda+6)x^2+7x+\mu$ έχει παράγοντα το x και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x+1 είναι 3 έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} P(0)=0 \\ P(-1)=3 \end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot 0^5-3\cdot 0^4-7\cdot 0^3+(\lambda+6)\cdot 0^2+7\cdot 0+\mu=0 \\ 2\cdot(-1)^5-3\cdot(-1)^4-7\cdot(-1)^3+(\lambda+6)\cdot(-1)^2+7\cdot(-1)+\mu=3 \end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \mu=0 \\ -2-3+7+\lambda+6-7+\mu=3 \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \mu=0 \\ 1+\lambda=3 \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \mu=0 \\ \lambda=2 \end{array}\right).$$

Β. i. Για λ=2 και μ=0 είναι: $P(x)=2x^5-3x^4-7x^3+8x^2+7x$. Κάνουμε τη διαίρεση του P(x) με το x^2-2 :

$$\begin{array}{l|l} 2x^5-3x^4-7x^3+8x^2+7x+0 & x^2-2 \\ \hline -2x^5 \qquad\quad +4x^3 & 2x^3-3x^2-3x+2 \\ \hline \qquad -3x^4\ -3x^3+8x^2\ +7x+0 & \\ \qquad +3x^4 \qquad\quad -6x^2 & \\ \hline \qquad\qquad -3x^3+2x^2+7x+0 & \\ \qquad\qquad +3x^3 \qquad\ \ -6x & \\ \hline \qquad\qquad\qquad +2x^2+x+0 & \\ \qquad\qquad\qquad -2x^2 \qquad +4 & \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad x+4 & \end{array}$$

Η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης είναι:

$P(x)=(x^2-2)(2x^3-3x^2-3x+2)+x+4$

ii. Για να είναι η γραφική παράσταση του P(x) είναι πάνω από την ευθεία y=x+4 πρέπει:

$$P(x)>x+4\Leftrightarrow(x^2-2)(2x^3-3x^2-3x+2)+x+4>x+4\Leftrightarrow$$

$$(x^2-2)(2x^3-3x^2-3x+2)>0\Leftrightarrow(x^2-2)\left[2(x^3+1)-3x(x+1)\right]>0$$

$$(x^2-2)\left[2(x+1)(x^2-x+1)-3x(x+1)\right]>0\Leftrightarrow$$

$$(x^2-2)(x+1)(2x^2-2x+2-3x)>0\Leftrightarrow$$

$$(x^2-2)(x+1)(2x^2-5x+2)>0\ (1)$$

www.efklidis.edu.gr Τρίκαλα τηλ.-fax(24310-36733)

Βρίσκουμε τις ρίζες του κάθε παράγοντα και κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων.

* $x^2-2=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$.
* $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.
* $2x^2-5x+2=0 \overset{\Delta=9>0}{\Leftrightarrow} x=2 \text{ ή } x=\frac{1}{2}.$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		$\frac{1}{2}$		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
Γ		-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	

Επομένως, $x\in\left(-\sqrt{2},-1\right)\cup\left(\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)\cup\left(2,+\infty\right)$.

Γ. Για να είναι P(x)=Q(x) όπου $P(x)=2x^5-3x^4-7x^3+8x^2+7x$ και $Q(x)=2x^5+(2\alpha+\beta)x^4-7x^3+(-3\alpha+2\beta)x^2+(\kappa+6)x+\kappa-1$ πρέπει:

$$\left.\begin{array}{l}2\alpha+\beta=-3\\-3\alpha+2\beta=8\\\kappa+6=7\\\kappa-1=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}-4\alpha-2\beta=6\\-3\alpha+2\beta=8\\\kappa=1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}-7\alpha=14\\2\alpha+\beta=-3\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left(\begin{array}{l}\alpha=-2\\\beta=1\\\kappa=1\end{array}\right).$$