ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

51

Ον/μο:……………….. **Α' Λυκείου**

Ύλη: Τρίγωνα, Παράλληλες ευθείες, Παραλληλόγραμμα **20-03-21**

Θέμα 1^{ο} :

Α. Να διατυπώσετε το αίτημα παραλληλίας. **(5 μον.)**

Β. Τι ονομάζουμε παραλληλόγραμμο; Ποιες ιδιότητες έχει; **(7 μον.)**

Γ. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με 180°. **(8 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** **Σ**ωστό ή **(Λ)** **Λ**άθος τις παρακάτω προτάσεις :

i. Δύο τρίγωνα που έχουν δύο γωνίες τους και μία πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία, είναι ίσα. **Σ Λ**

ii. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\beta-\gamma<\alpha<\beta+\gamma$. **Σ Λ**

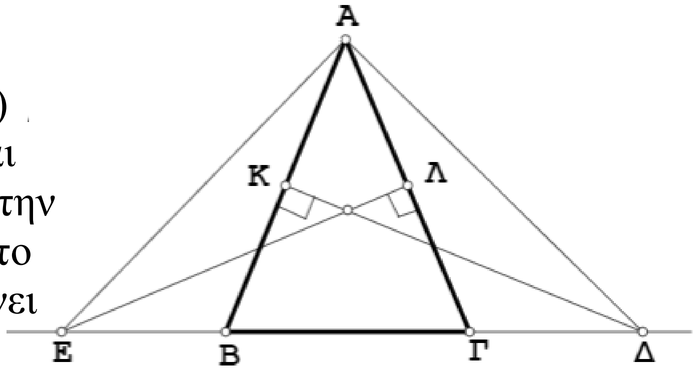
iii. Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός κι επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές, τότε είναι παράλληλες. **Σ Λ**

iv. Το βαρύκεντρο είναι το σημείο τομής των διχοτόμων. **Σ Λ**

v. Οι διαγώνιοι του τετραγώνου, τέμνονται κάθετα. **Σ Λ**

(5x1=5 μον.)

Θέμα 2^{ο} :



Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και Κ, Λ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Στο Κ φέρνουμε κάθετη στην ΑΒ που τέμνει την ευθεία ΒΓ στο Δ και στο Λ φέρνουμε την κάθετη στην ΑΓ που τέμνει την ευθεία ΒΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι:

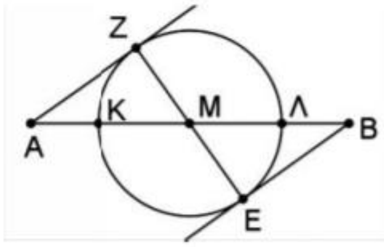
Α. ΚΔ=ΕΛ. **(8 μον.)**

Β. ΕΒ=ΔΓ. **(9 μον.)**

Γ. Το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές. **(8 μον.)**

Θέμα 3ο :

Α. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και Μ μέσο του. Ο κύκλος (Μ,ρ), όπου $\frac{MB}{2} < \rho < MB$, τέμνει το ΑΒ στα Κ, Λ. Αν ΑΖ και ΒΕ τα εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο και ΖΕ διάμετρος, να αποδείξετε ότι:



i. Τα τρίγωνα ΑΖΜ και ΜΕΒ είναι ίσα. **(5 μον.)**

ii. Το τετράπλευρο ΑΖΒΕ είναι παραλληλόγραμμο. **(5 μον.)**

iii. Το τετράπλευρο ΚΖΛΕ είναι ορθογώνιο. **(5 μον.)**

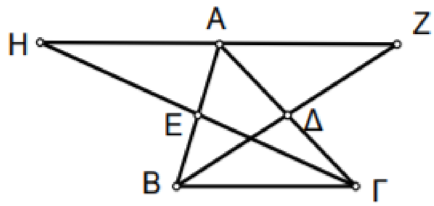
Β. Δίνονται ευθεία ε και τα διαδοχικά σημεία της Α, Β, Γ με ΑΒ<ΒΓ. Στο σημείο Β φέρουμε κάθετη ημιευθεία προς την ε, και πάνω σ' αυτήν τα σημεία Δ και Ε με ΒΔ=ΑΒ και ΒΕ=ΒΓ.
Να αποδείξετε ότι:

i. ΑΕ=ΓΔ . **(5 μον.)**

ii. $AE \perp \Gamma\Delta$. **(5 μον.)**

Θέμα 4ο :

Α. Προεκτείνουμε τις διαμέσους ΒΔ, ΓΕ τριγώνου ΑΒΓ κατά τμήματα ΔΖ=ΒΔ και ΕΗ=ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:



i. Τα τετράπλευρα ΑΒΓΖ και ΑΗΒΓ είναι παραλληλόγραμμα. **(6 μον.)**

ii. Τα σημεία Η, Α, Ζ είναι συνευθειακά και το Α είναι μέσο του ΗΖ. **(7 μον.)**

Β. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ =2ΒΓ . Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ (προς το μέρος του Δ) κατά τμήμα ΔΕ=ΑΔ και φέρουμε την ΒΕ που τέμνει τη ΔΓ στο Η.
Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΒΑΕ είναι ισοσκελές. **(4 μον.)**

ii. Το ΔΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο. **(4 μον.)**

iii. Η ΑΗ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΑΕ. **(4 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(Ενδεικτικές)

Θέμα 1ο :

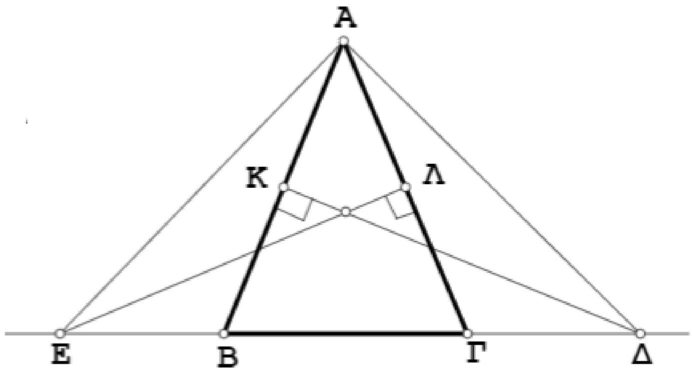
Α. Σχ. Βιβλίο

Β. Σχ. Βιβλίο

Γ. Σχ. Βιβλίο

Δ. i. Σ **ii.** Λ **iii.** Σ **iv.** Λ **v.** Σ

Θέμα 2ο :



Α. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΓΛ και ΚΒΔ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\text{ΛΓ} = \text{ΚΒ}(\text{ως μισά ίσων πλευρών}) \\ 2.\hat{\text{Β}} = \hat{\text{Γ}}(\text{ως προσκ. στη βαση ισοσκ.}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα, έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα. Επομένως, όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα, άρα και ΕΛ=ΚΔ.

Β. Από την προηγούμενη σύγκριση είναι:

$$\text{ΒΔ} = \text{ΕΓ} \Leftrightarrow \text{ΒΔ} - \text{ΒΓ} = \text{ΕΓ} - \text{ΒΓ} \Leftrightarrow \text{ΕΒ} = \text{ΓΔ}$$

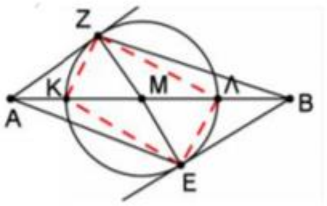
Γ. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΓΔ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}(\text{Υ}) \\ 2.\hat{\text{Β}} = \hat{\text{Γ}}(\text{ως παραπλ. ίσων γωνιών}) \\ 3.\text{ΕΒ} = \text{ΓΔ}(\text{προηγ. ερώτημα}) \end{array}\right\} \overset{\text{Π}-\text{Γ}-\text{Π}}{\Rightarrow} \text{Τα τρίγωνα είναι ίσα.}$$

Οπότε ΑΕ=ΑΔ, δηλαδή το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.

<u>Θέμα 3^{ο}</u> :

Α.



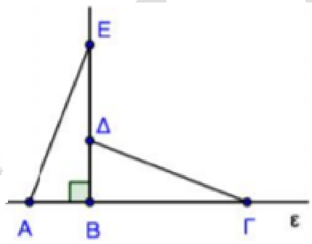
i. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΖΜ και ΜΕΒ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\mathrm{MZ}=\mathrm{ME}(\text{ακτίνες του κύκλου}) \\ 2.\mathrm{A}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{Z}=\mathrm{E}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{B}(\text{ως κατακορυφήν}) \\ 3.\mathrm{AM}=\mathrm{MB}(\mathrm{M}\ \text{μέσο του AB}) \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Rightarrow} \text{Τα τρίγωνα είναι ίσα.}$$

ii. Επειδή ΑΜ=ΜΒ και ΜΖ=ΜΕ οι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΑΖΒΕ διχοτομούνται οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

iii. Επειδή ΜΖ=ΜΕ και ΜΚ=ΜΛ (ακτίνες), οι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΚΖΛΕ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή επιπλέον ΚΛ=ΖΕ=2ρ, το ΚΖΛΕ έχει ίσες διαγωνίους, άρα είναι ορθογώνιο.

Β. i.

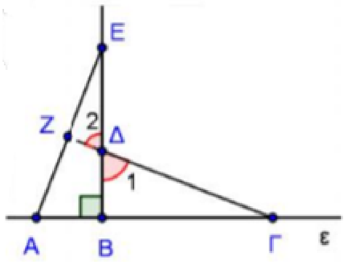


Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ και ΒΓΔ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\mathrm{AB}=\mathrm{B}\Delta(\mathrm{Y}) \\ 2.\mathrm{BE}=\mathrm{B}\Gamma(\mathrm{Y}) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Τα ορθογώνια τρίγωνα , έχουν δύο πλευρές}$$

ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα, οπότε και ΑΕ=ΓΔ.

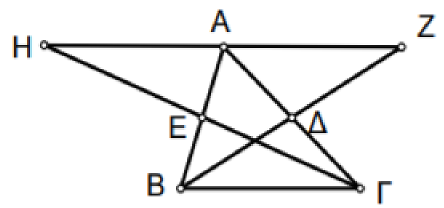
ii.



Έστω Ζ το σημείο τομής των ΓΔ και ΑΕ. Θα αποδείξουμε ότι $\hat{Z}=90^\circ$ και για το λόγο αυτό θα υπολογίσουμε το άθροισμα των γωνιών, $\hat{\Delta}_2$ και $\hat{E}$. Είναι $\hat{\Delta}_2=\hat{\Delta}_1$ ως κατακορυφήν και $\hat{A}=\hat{\Delta}_1$, εφόσον τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΒΓΔ είναι ίσα, οπότε $\hat{\Delta}_2+\hat{E}=\hat{\Delta}_1+\hat{E}$. Από το άθροισμα των γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΕ έχουμε ότι $\hat{A}+\hat{E}=90^\circ$, άρα $\hat{\Delta}_2+\hat{E}=90^\circ$, οπότε στο τρίγωνο ΔΖΕ είναι και $\hat{Z}=90^\circ$, άρα $AE\perp \Gamma\Delta$.

<u>Θέμα 4ο</u> :

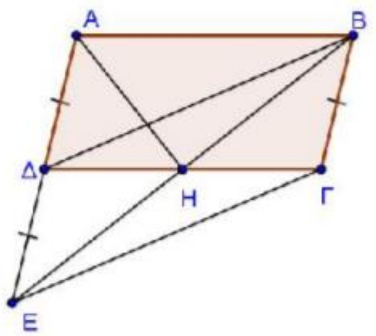
Α.



i. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΖ είναι ΒΔ=ΔΖ και ΑΔ=ΓΔ, οπότε οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, άρα είναι παραλληλόγραμμο. Όμοια στο ΑΓΒΗ είναι ΓΕ=ΕΗ και ΑΕ=ΒΕ, δηλαδή οι διαγώνιοί του διχοτομούνται , οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

ii. Από το i ερώτημα προκύπτει ότι ΑΖ//=ΒΓ και ΑΗ//=ΒΓ. Όμως, οι δύο αυτές παράλληλες διέρχονται από το ίδιο σημείο, άρα σύμφωνα με το αίτημα παραλληλίας η ευθεία που διέρχεται από τα Η, Α και Ζ είναι μοναδική, δηλαδή είναι συνευθειακά. Επίσης, εφόσον ΑΖ=ΒΓ και ΑΗ=ΒΓ έπεται ότι ΑΗ=ΑΖ, δηλαδή το Α είναι το μέσο του ΗΖ.

Β.



i. Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες, δηλαδή ΑΔ=ΒΓ. Είναι ΑΕ=ΑΔ+ΔΕ=2ΑΔ=2ΒΓ=ΑΒ, άρα το τρίγωνο ΒΑΕ είναι ισοσκελές.

ii. Επειδή τα σημεία Α, Δ, Ε είναι συνευθειακά και ΒΓ//ΑΔ, είναι και ΒΓ//ΔΕ. Όμως, ΒΓ=ΔΕ, άρα το τετράπλευρο ΔΕΓΒ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

iii. Επειδή το ΔΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιές του ΓΔ, ΒΕ διχοτομούνται στο Η. Δηλαδή το Η είναι μέσο του ΒΕ, οπότε η ΑΗ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΑΕ.