ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

213

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη:Συναρτήσεις-Παράγωγοι **20-3-21**

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1.Εστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_o εσωτερικό σημείο του Δ.Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_o και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_o)=0$ **(μον.7)**

Α2.Εστω μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α.Πότε θα λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_o \in A$ τοπικό μέγιστο και πότε τοπικό ελάχιστο; **(μον.5)**

Α3.Εστω ο ισχυρισμός:<<Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ τέτοια ώστε $f^2(x)=0$ για κάθε $x \in R$.Τότε $f(x)=0,\ \forall x \in R$ >>.

α)Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως Σ ή Λ. **(μον.2)**

β)Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α). **(μον.3)**

Α4.Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σ ή Λ.

α)Για κάθε αντιστρέψιμη συνάρτηση $f: A \to R$ ισχύει:
$f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$, για κάθε $x \in A$ και $y \in f(A)$. Σ Λ

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1$ Σ Λ

γ)Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{1}{f(x)}=0$ Σ Λ

δ)Η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha \in R-Z$ είναι παραγωγίσιμη στο R. Σ Λ

(μον.8)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2x^2, & |x|\le 1\\ \dfrac{2}{x}, & |x|>1\end{cases}$

B1. Να εξετάσετε την f ως προς τη συνέχεια. **(μον.6)**

B2. Να βρείτε, όπου ορίζεται την παράγωγο της f. **(μον.5)**

B3. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, $|f|$, και $-f$. **(μον.9)**

B4. Αν η εξίσωση $f(x)=(\mu+1)^{2021}+3$ έχει δύο ακριβώς λύσεις να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού μ. **(μον.5)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=|2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x|$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια (μον.2) και ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το οποίο και να βρείτε.(μον.3). **(μον.5)**

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f γράφεται:

$$f(x)=\begin{cases}-2\eta\mu x-\varepsilon\varphi x+3x, & x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\\ 2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

(μον.7)

Γ3. Αν η συνάρτηση δεν ικανοποιεί το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών σε οποιοδήποτε διάστημα της μορφής [α, β], όπου $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha=-\beta$ (μον.5) και ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f στο διάστημα αυτό.(μον3) **(μον.8)**

Γ4.Αν $M_o(x_o, y_o)$, όπου $y_o \neq f(x_o)$ είναι ένα σημείο του επιπέδου τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει, ένα τουλάχιστον, σημείο της C_f με τετμημένη $x_1 \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ που απέχει από το M_o λιγότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της στο διάστημα αυτό και ένα τουλάχιστον σημείο της C_f με τετμημένη $x_2 \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ που απέχει από το M_o περισσότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της στο διάστημα αυτό. **(μον.5)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : R \to R$ τέτοιες ώστε:

- $f(x) = \sqrt{\frac{4}{\rho}x^2 + \alpha x + \frac{\rho}{2}}$ με $\rho, \alpha \in Z$ και $\rho < \alpha$, $\rho \neq 0$
- $e^{g(x)} \leq e^{\mu x} \cdot \left(g(x) + 1 - \mu x\right)$, $\forall x \in R$ και $\mu \in R$.

Δ1.Να δείξετε ότι $e^x \geq x + 1$, $\forall x \in R$. **(μον.3)**

Δ2.Να αποδείξετε ότι:

$f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x + \frac{1}{2}}$ (μον.4) και $g(x) = \mu x$ (μον.3). **(μον.7)**

Δ3.Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του μ το όριο: $\lim_{x \to -\infty} e^{f(x)+g(x)}$ **(μον.6)**

Δ4.Αν μ=2 να εξετάσετε αν η C_{f+g} έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$. **(μον.3)**

Δ5.Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από το σημείο Μ(α,β) με $\beta > f(\alpha)$. **(μον.6)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Σημείωση: Το διαγώνισμα είναι ,με μικρές παρεμβάσεις, από το site Study4exams.

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

Α1 , **Α2** Θεωρία

Α3. α) Σωστό

β)Εστω υπάρχει $x_o \in R$ ώστε $f(x_o) \neq 0$.Τότε $f^2(x_o) \neq 0$.Ατοπο.
Αρα $f(x_o) = 0$.

Α4. α Σ, β Λ, γ Σ, δ Λ

ΘΕΜΑ Β

Η f γράφεται: $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & -1 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{2}{x}, & x< -1 \text{ η } x>1 \end{cases}$

Β1.Η f είναι συνεχής στα $(-1,1)$ και $(-\infty,-1)$, $(1,+\infty)$ ως πολυωνυμική και ρητή αντίστοιχα. Εξετάζουμε τη συνέχεια στα σημεία $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$.

Είναι:

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-}\left(\dfrac{2}{x}\right) = -2$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+}\left(2x^2\right) = 2$ οπότε η f είναι δεν είναι συνεχής στο $x_1 = -1$.

Επίσης:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(2x^2\right) = 2$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{2}{x}\right) = 2$, $f(1) = 2\cdot 1^2 = 2$ οπότε η f είναι συνεχής στο $x_2 = 1$.

Β2.Η παραγωγισιμότητα ελέγχεται στις θέσεις $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$.

Στο $x_1 = -1$ η f δεν είναι συνεχής άρα ούτε παραγωγίσιμη.

Επίσης:

$$f'_\delta(1) = \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{2}{x}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{-2(x-1)}{x(x-1)} = -2$$

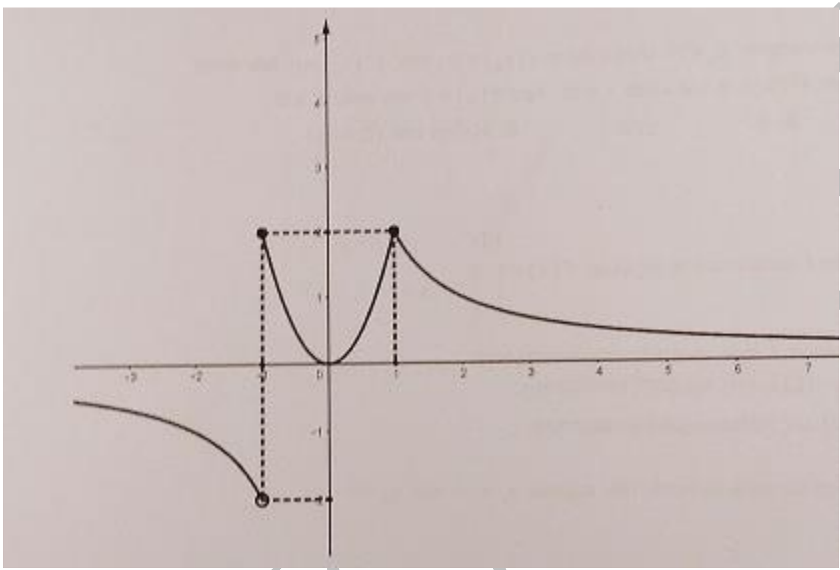
$$f'_\alpha(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^{-1}}\frac{2x^2-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2(x-1)(x+1)}{x-1}=4.$$

Αφού $f'_\alpha(1)\neq f'_\delta(1)$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

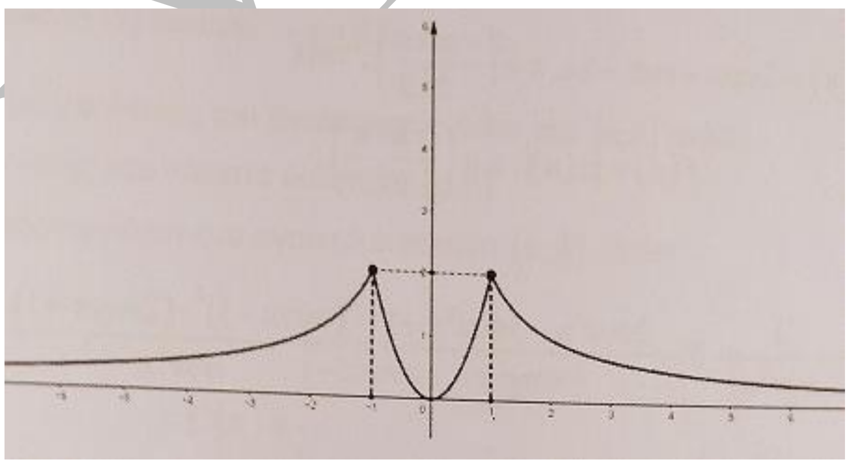
Αρα: $f'(x)=\begin{cases}4x, & -1<x<1\\ -\dfrac{2}{x^2}, & x<-1 \text{ ή } x>1\end{cases}$

B3. Οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις είναι οι παρακάτω

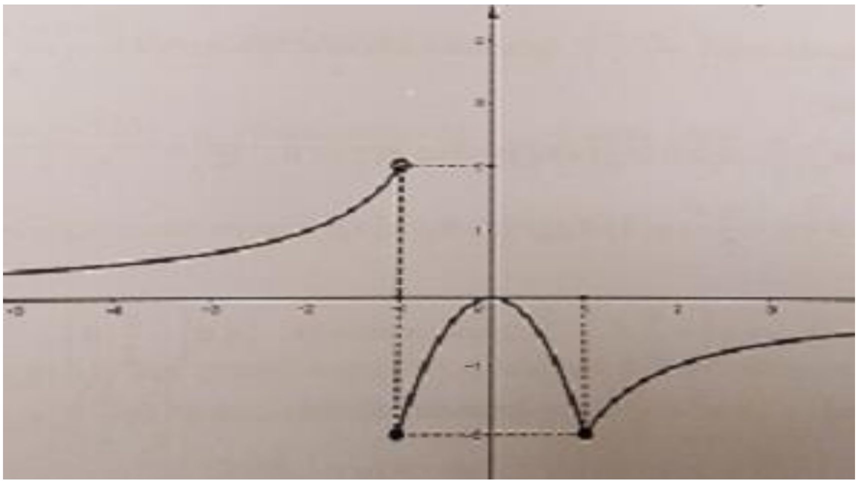
Η C_f



Η $C_{|f|}$



Η C_{-f}



Β4. Αφού η εξίσωση έχει ακριβώς δύο λύσεις, από την γραφική παράσταση της f του ερωτήματος (Β3) προκύπτει ότι:

$$(\mu+1)^{2021}+3=2 \Leftrightarrow (\mu+1)^{2021}=-1 \Leftrightarrow \mu+1=-1 \Leftrightarrow \mu=-2$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αρχικά $\forall x \in A$ το $-x \in A$.

Επίσης $f(-x)=|2\eta\mu(-x)+\varepsilon\varphi(-x)-3(-x)|=$

$=|-2\eta\mu x-\varepsilon\varphi x+3x|=|2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x|=f(x)$ άρα f άρτια.

Επίσης $f(x)=|2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x|\geq 0, \forall x\in A_f$ με το = να ισχύει για x=0.

Αρα η f έχει ολικό ελάχιστο το 0.

Γ2. Εστω $g(x)=2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x$. Θα βρούμε το πρόσημό της.

Είναι: $g'(x)=2\sigma\upsilon\nu x+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-3=\dfrac{2\sigma\upsilon\nu^3 x-3\sigma\upsilon\nu^2 x+1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=$

$$=\frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x-2\sigma\upsilon\nu^2 x-\sigma\upsilon\nu^2 x+1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{2\sigma\upsilon\nu^2 x(\sigma\upsilon\nu x-1)-(\sigma\upsilon\nu^2 x-1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=$$

$$=\frac{(\sigma\upsilon\nu x-1)(2\sigma\upsilon\nu^2 x-\sigma\upsilon\nu x-1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=$$

$$=\frac{(\sigma\upsilon\nu x-1)\cdot 2\cdot(\sigma\upsilon\nu x-1)\left(\sigma\upsilon\nu x+\dfrac{1}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{(\sigma\upsilon\nu x-1)^2\cdot(2\sigma\upsilon\nu x+1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\geq 0$$

με το = να ισχύει μόνο για x=0. Αρα η g είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως:

●Αν $\frac{\pi}{2} < x < 0 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x) < g(0) = 0$

●Αν $x > 0 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x) > g(0) = 0$

Ο τύπος λοιπόν τα f γίνεται: $f(x) = \begin{cases} -2\eta\mu x - \varepsilon\varphi x + 3x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

Γ3.●Η f είναι συνεχής και δεν ικανοποιεί το Θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών σε οποιοδήποτε διάστημα [α, β], άρα θα ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$.

Αλλά $f(\alpha) = f(-\alpha)$ άρα $f(\beta) = f(-\alpha) \xRightarrow[\substack{0<-\alpha<\frac{\pi}{2} \\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}}]{\substack{-\frac{\pi}{2}<\alpha<0 \\ 1-1 \text{ στο } (0,\frac{\pi}{2})}} \alpha = -\beta \quad \beta = -\alpha$.

●Η f είναι συνεχής στο [α,β] και f(α)=f(β).Για να ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Rolle πρέπει να είναι και παραγωγίσιμη στο (α,β).Προς τούτο αρκεί να είναι παραγωγίσιμη στο 0.
Είναι:

$$f_\delta'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(2\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\varepsilon\varphi x}{x} - 3\right) = 2+1-3 = 0$$

$$f_\alpha'(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-2\eta\mu x - \varepsilon\varphi x + 3x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(-2\frac{\eta\mu x}{x} - \frac{\varepsilon\varphi x}{x} + 3\right) = 0$$

Αρα και $f'(0) = 0$.

Γ4.Εστω $M(x, f(x))$ οπότε $(M_oM) = \sqrt{(x-x_o)^2 + (f(x)-y_o)^2} = d(x)$.

Η d είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων άρα έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή, $d(x_1) = d_{min}$ και $d(x_2) = d_{max}$ με $x_1, x_2 \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$.

<u>**ΘΕΜΑ Δ**</u>

Δ1. Είναι γνωστό ότι $\ln x \le x-1,\ \forall x>0$ οπότε θέτοντας όπου, x το $e^x>0, \forall x\in R$ προκύπτει ότι $\ln e^x \le e^x - 1 \Leftrightarrow x \le e^x - 1 \Leftrightarrow e^x \ge x+1$.
Το = ισχύει μόνο όταν x=0.

Δ2. ●Για την f:

Πρέπει $\frac{4}{\rho}x^2+\alpha x+\frac{\rho}{2}\ge 0,\ \forall x\in R$ άρα πρέπει

$$\left.\begin{array}{l}\Delta\le 0\\ \frac{4}{\rho}>0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{c}\alpha^2-4\cdot\frac{4}{\rho}\cdot\frac{\rho}{2}\le 0\\ \rho>0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{c}\alpha^2-8<0\\ \rho>0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{c}-2\sqrt{2}<\alpha<2\sqrt{2}\\ \rho>0\end{array}\right\}\text{ και}$$

επειδή $\rho,\alpha\in Z$ και ρ<α είναι $\rho<\alpha\le 2\sqrt{2}<3$ άρα ρ=1 και α=2.

Η λοιπόν είναι η $f(x)=\sqrt{4x^2+2x+\frac{1}{2}}$.

●Για την g:

Ισχύει ότι $e^{g(x)}\le e^{\mu x}\cdot\left(g(x)+1-\mu x\right),\ \forall x\in R$ και $\mu\in R \Leftrightarrow$
$e^{g(x)-\mu x}\le g(x)-\mu x+1$. Λόγω του ερωτήματος (Δ3) προκύπτει ότι $g(x)-\mu x=0 \Leftrightarrow g(x)=\mu x$

Δ3. Είναι: $f(x)+g(x)=\sqrt{4x^2+2x+\frac{1}{2}}+\mu x$ οπότε:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x+\frac{1}{2}}+\mu x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[-x\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{2x^2}}-\mu\right)\right]=(+\infty)(2-\mu)=$$

$$=\begin{cases}-\infty, \text{ αν } \mu>2 \text{ και } \lim\limits_{x\to-\infty}e^{f(x)+g(x)}=0\\ +\infty, \text{ αν } \mu<2 \text{ και } \lim\limits_{x\to-\infty}e^{f(x)+g(x)}=+\infty\end{cases}.$$

Αν μ = 2 είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x+\frac{1}{2}}+2x\right)\overset{(+\infty)-(+\infty)}{======}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+\frac{1}{2}}{\sqrt{4x^2+2x+\frac{1}{2}}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2+\frac{1}{2x}\right)}{-x\sqrt{4+\frac{2}{2}+\frac{1}{2x^2}}+2}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{(f(x)+g(x))}=e^{-\frac{1}{2}}$.

Συμπερασματικά λοιπόν έχουμε: $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{(f(x)+g(x))}=\begin{cases}0, & \text{αν } \mu>2\\ +\infty, & \text{αν } \mu<2\\ e^{-\frac{1}{2}}, & \text{αν } \mu=2\end{cases}$

Δ4. Για μ=2, από το (Δ3) ερώτημα είναι $\lim\limits_{x\Rightarrow-\infty}\left(f(x)+g(x)\right)=-\frac{1}{2}$

Άρα η C_{f+g} έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Δ5. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f σε σημείο της $N\left(x_o,f(x_o)\right)$ είναι $\varepsilon: y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o)$ και έστω διέρχεται από το σημείο Μ(α,β). Τότε θα επαληθεύεται απ' αυτό άρα:

$\beta-f(x_o)=f'(x_o)(\alpha-x_o)\Leftrightarrow f(x_o)-x_of'(x_o)+\alpha f'(x_o)-\beta=0$

Θα δείξουμε η εξίσωση αυτή ότι δεν έχει ρίζες.

Θεωρούμε την $h(x)=f(x)-xf'(x)+\alpha f'(x)-\beta=f(x)+(\alpha-x)f'(x)-\beta$

Εχει παράγωγο την $h'(x)=f'(x)-f'(x)+(\alpha-x)f''(x)=(\alpha-x)f''(x)$.

Είναι: $f'(x)=\frac{4x+1}{f(x)}$ και $f''(x)=\cdots=\frac{1}{\left(4x^2+2x+\frac{1}{2}\right)f(x)}>0$ οπότε

η h' έχει ρίζα την x=α και ο πίνακας μεταβολών δείχνει τη μονοτονία και τα ακρότατά της h.

x	$-\infty$ A_1 α	A_2 $+\infty$
h'	+	−
h	↗	↘

Εχει μέγιστο το h(α)=f(α) −β<0.

Άρα δεν μηδενίζεται.

Επομένως δεν υπάρχει εφαπτομένη της C_f που να διέρχεται από το Μ(α,β).