ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

116
Ον/μο:………………………. **Β' Λυκείου**
Ύλη: Συστήματα –Ιδιότητες Συναρτήσεων- Τριγωνομετρία- Πολυώνυμα **20-03-21**

Θέμα 1ο:

Α.i. Τι ονομάζουμε πολυώνυμο του x; **(4 μον.)**

ii. Πότε μία συνάρτηση f ονομάζεται άρτια σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; **(5 μον.)**

iii. Τι ονομάζουμε τριγωνομετρικό κύκλο; **(5 μον.)**

Β. Να αποδείξετε ότι ένα πολυώνυμο έχει παράγοντα το x-ρ, αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου. **(6 μον.)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** **Σωστό** ή **(Λ)** **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Αν δύο πολυώνυμα έχουν τις ίδιες ρίζες, τότε είναι ίσα. **Σ Λ**

ii. Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης, έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$. **Σ Λ**

iii. $\eta\mu\left(5\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **Σ Λ**

iv. Το σύστημα $\left.\begin{matrix} x+y=5 \\ x\cdot y=6 \end{matrix}\right\}$ έχει μοναδική λύση. **Σ Λ**

v. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma\left(A=90^\circ\right)$ ισχύει ότι

$\eta\mu B=\dfrac{A\Gamma}{B\Gamma}$. **Σ Λ**

(5x1=5 μον.)

Θέμα 2ο:

Δίνεται το σύστημα: $\left.\begin{matrix} (\lambda-4)x+3y=5 \\ 3x+(\lambda+4)y=15 \end{matrix}\right\}$.

Α. Να λύσετε το σύστημα για λ=-10. **(7 μον.)**

Β. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες το σύστημα έχει μοναδική λύση. **(6 μον.)**

Γ. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. **(6 μον.)**

Δ. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες το σύστημα είναι αδύνατο. **(6 μον.)**

www.efklidis.edu.gr *Τρίκαλα τηλ.-fax(24310-36733)*

Θέμα 3ο:

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-\eta\mu(\pi+2x)$.

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=2\eta\mu 2x$. **(6 μον.)**

Β. Να βρείτε την περίοδο Τ της συνάρτησης f, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, στο διάστημα $[0,2\pi]$. **(5 μον.)**

Γ. Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{\pi}{8}\right)+f\left(\frac{3\pi}{8}\right)+f\left(\frac{5\pi}{8}\right)+f\left(\frac{7\pi}{8}\right)=0$. **(5 μον.)**

Δ. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $f(x)-1=0$

ii. $f(x)=2\sigma\upsilon\nu 2x$

iii. $f(x)=4\sigma\upsilon\nu^2 2x-2$ **(3x3=9 μον.)**

Θέμα 4ο:

Δίνονται τα πολυώνυμα $f(x)=x^3+(\alpha+1)x^2+\beta x+3$ και $g(x)=x^2-4x+3$.

Α. Αφού γράψετε τη συνάρτηση g στη μορφή $g(x)=\gamma(x+\delta)^2+\varepsilon$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της g και με βάση το σχήμα της να βρείτε το σύνολο τιμών της. **(5 μον.)**

Β. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τα οποία το $g(x)$ είναι παράγοντας του $f(x)$. **(7 μον.)**

Γ. Έστω α=-4 και β=-1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. **(6 μον.)**

Δ. Αν πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με x-1 δίνει υπόλοιπο 2 και διαιρούμενο με το x-3 δίνει υπόλοιπο 4, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $g(x)$. **(7 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1ο:

A. i. Σχ. Βιβλίο
ii. Σχ. Βιβλίο
iii. Σχ. Βιβλίο

B. Σχ. Βιβλίο

Γ. **i.**Λ **ii.**Σ **iii.** Σ **iv.**Λ **v.**Σ

Θέμα 2ο:

A. Δίνεται το σύστημα: $\left.\begin{matrix}(\lambda-4)x+3y=5\\ 3x+(\lambda+4)y=15\end{matrix}\right\}$.

Για λ=-10 το σύστημα γίνεται:

$$\left.\begin{matrix}-14x+3y=5\\ 3x-6y=15\end{matrix}\right\}\overset{\cdot 2}{\Rightarrow}\left.\begin{matrix}-28x+6y=10\\ 3x-6y=15\end{matrix}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}\left.\begin{matrix}-25x=25\\ 3x-6y=15\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix}x=-1\\ 3x-6y=15\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x=-1\\ -6y=18\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}x=-1\\ y=-3\end{pmatrix}.$$

B. Για να έχει το σύστημα μοναδική λύση πρέπει:

$$D\neq 0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}\lambda-4 & 3\\ 3 & \lambda+4\end{vmatrix}\neq 0\Leftrightarrow\lambda^2-16-9\neq 0\Leftrightarrow\lambda\neq\pm 5\ .$$

Γ. Για να έχει το σύστημα άπειρες λύσεις πρέπει κατ' αρχάς :
$D=0\Leftrightarrow\lambda=\pm 5$. Για λ=5 το σύστημα γίνεται:

$$\left.\begin{matrix}x+3y=5\\ 3x+9y=15\end{matrix}\right\}\underset{:3}{\Rightarrow}\left.\begin{matrix}x+3y=5\\ x+3y=5\end{matrix}\right\}$$ δηλαδή έχει άπειρες λύσεις.

Για λ=-5 είναι:

$$\left.\begin{matrix}-9x+3y=5\\ 3x-y=15\end{matrix}\right\}\overset{:(-3)}{\Rightarrow}\left.\begin{matrix}3x-y=-\dfrac{5}{3}\\ 3x-y=15\end{matrix}\right\}$$ δηλαδή είναι αδύνατο.

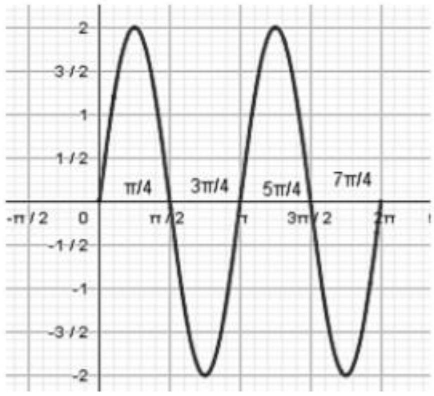
Επομένως, για να έχει άπειρες λύσεις, πρέπει λ=5.

Δ. Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι για λ=-5 το σύστημα είναι αδύνατο.

Θέμα 3ο:

Α. $f(x)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-\eta\mu(\pi+2x)=\eta\mu 2x-(-\eta\mu 2x)=2\eta\mu 2x$.

Β. Η περίοδος είναι $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$, το μέγιστο είναι το 2 και το ελάχιστο το -2. Η γραφική της παράσταση είναι:



Γ.

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right)+f\left(\frac{3\pi}{8}\right)+f\left(\frac{5\pi}{8}\right)+f\left(\frac{7\pi}{8}\right)=$$

$$2\eta\mu\left(2\frac{\pi}{8}\right)+2\eta\mu\left(2\frac{3\pi}{8}\right)+2\eta\mu\left(2\frac{5\pi}{8}\right)+2\eta\mu\left(2\frac{7\pi}{8}\right)=$$

$$2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\right)+2\eta\mu\left(\frac{3\pi}{4}\right)+2\eta\mu\left(\frac{5\pi}{4}\right)+2\eta\mu\left(\frac{7\pi}{4}\right)=$$

$$2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\right)+2\eta\mu\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+2\eta\mu\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+2\eta\mu\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$2\eta\mu\frac{\pi}{4}+2\eta\mu\frac{\pi}{4}-2\eta\mu\frac{\pi}{4}-2\eta\mu\frac{\pi}{4}=0$$

Δ. i.

$$f(x)-1=0\Leftrightarrow 2\eta\mu 2x=1\Leftrightarrow \eta\mu 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \eta\mu 2x=\eta\mu\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6} \\ 2x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6} \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=\kappa\pi+\frac{\pi}{12} \\ x=\kappa\pi+\frac{5\pi}{12} \end{array}\right\},\kappa\in\mathbb{Z}.$$

ii.

$$f\left(x\right)=2\sigma\upsilon\nu2x \Leftrightarrow 2\eta\mu2x=2\sigma\upsilon\nu2x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu2x}{\sigma\upsilon\nu2x}=1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi2x=1$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi2x=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x=\frac{\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{8},\kappa\in\mathbb{Z}.$$

iii.

$$f\left(x\right)=4\sigma\upsilon\nu^2 2x-2 \Leftrightarrow 2\eta\mu2x=4\sigma\upsilon\nu^2 2x-2 \Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu2x=4\left(1-\eta\mu^2 2x\right)-2 \Leftrightarrow 2\eta\mu2x=4-4\eta\mu^2 2x-2 \Leftrightarrow$$

$$4\eta\mu^2 2x+2\eta\mu2x-2=0 \Leftrightarrow 2\eta\mu^2 2x+\eta\mu2x-1=0 \underset{\eta\mu2x=\omega}{\overset{\Theta\acute{\varepsilon}\tau o\upsilon\mu\varepsilon}{\Rightarrow}}$$

$$2\omega^2+\omega-1=0 \overset{\Delta=9>0}{\Rightarrow} \omega=-1 \text{ ή } \omega=\frac{1}{2}.$$

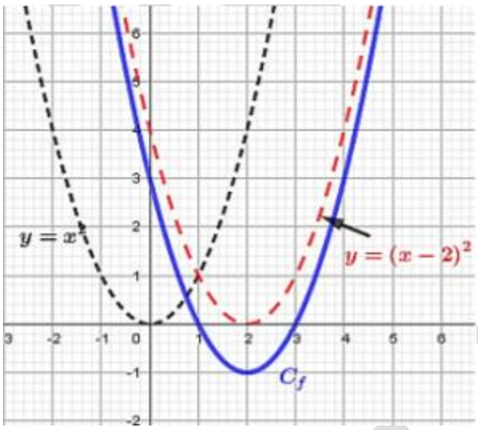
Οπότε έχουμε:

$$\eta\mu2x=-1 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 2x=2\kappa\pi+\dfrac{3\pi}{2} \\ 2x=2\kappa\pi-\dfrac{\pi}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=\kappa\pi+\dfrac{3\pi}{4} \\ x=\kappa\pi-\dfrac{\pi}{4} \end{matrix}\right\},\kappa\in\mathbb{Z}. \quad \text{ή}$$

$$\eta\mu2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu2x=\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 2x=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{6} \\ 2x=2\kappa\pi+\dfrac{5\pi}{6} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{12} \\ x=\kappa\pi+\dfrac{5\pi}{12} \end{matrix}\right\},\kappa\in\mathbb{Z}.$$

Θέμα 4ο:

Α. Είναι $g(x)=x^2-4x+3=x^2-4x+4-1=(x-2)^2-1$. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y=x^2$ κατά 2 μονάδες δεξιά και 1 μονάδα κάτω. Επειδή, η κορυφή της παραβολής είναι το σημείο (2,-1) η g έχει σύνολο τιμών το $[1,+\infty)$.



Β. Είναι $g(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$. Το πολυώνυμο $f(x)$ έχει παράγοντα το g(x) αν και μόνο αν έχει για παράγοντες τους παράγοντες του g(x) δηλαδή τα x-1, x-3. Τότε:

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=0 \\ f(3)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 1+\alpha+1+\beta+3=0 \\ 27+9\alpha+9+3\beta+3=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \beta=-5-\alpha \\ 9\alpha+3\beta=-39 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \beta=-5-\alpha \\ 9\alpha+3(-5-\alpha)=-39 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \beta=-5-\alpha \\ 9\alpha-15-3\alpha=-39 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \beta=-5-\alpha \\ 6\alpha=-24 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \beta=-1 \\ \alpha=-4 \end{pmatrix}.$$

Γ. Είναι:

$$f(x)=x^3-3x^2-x+3=x^2(x-3)-(x-3)=(x-3)(x^2-1)=$$

$$(x-3)(x-1)(x+1).$$

Ο πίνακας προσήμων της f είναι:

x	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
$x+1$	−	0	+		+		+
$x-1$	−		−	0	+		+
$x-3$	−		−		−	0	+
$f(x)$	−	0	+	0	−	0	+

Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ όταν $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-1,1)\cup(3,+\infty)$.

Δ. Επειδή το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x-1 είναι 2 και με το x-3 είναι 4, ισχύει ότι P(1)=2 και P(3)=4. Επειδή ο διαιρέτης g(x) είναι 2^{ου} βαθμού , το υπόλοιπο θα είναι το πολύ 1^{ου} βαθμού . Δηλαδή θα έχει τη μορφή υ(x)=κx+λ. Τότε αν π(x) είναι το πηλίκο της διαίρεσης, θα είναι: $P(x) = g(x)\cdot\pi(x) + \kappa x + \lambda$. Οπότε:

$$\left.\begin{matrix} P(1)=2 \\ P(3)=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} g(1)\pi(1)+\kappa+\lambda=2 \\ g(3)\pi(3)+3\kappa+\lambda=4 \end{matrix}\right\} \underset{g(3)=0}{\overset{g(1)=0}{\Rightarrow}} \left.\begin{matrix} \kappa+\lambda=2 \\ 3\kappa+\lambda=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda=2-\kappa \\ 3\kappa+2-\kappa=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \lambda=2-\kappa \\ 2\kappa=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda=1 \\ \kappa=1 \end{pmatrix}.$$

Επομένως το ζητούμενο υπόλοιπο είναι $\upsilon(x) = x + 1$.