210
Γ' Λυκείου (Β)
Ον/μο:………………………… **Μαθ. Προσαν.**
Ύλη:Εννοια Συνάρτησης **6-2-2021**

ΘΕΜΑ Α

Α1.Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής, τι πεδίο ορισμού της , τι σύνολο τιμών της και τι γραφική παράσταση. **(μον.8)**

Α2.Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις:

$f_1(x) = \ln x,\ \ f_2(x) = x-1,\ \ f_3(x) = x,\ \ f_4(x) = x+1,\ \ f_5(x) = e^x$ **(μον.5)**

Α3.Να σχεδιάσετε τις $f_1(x) = \ln|x|$ και $f_2(x) = \frac{1}{2}\ln x^2$ **(μον.6)**

Α4.Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$. **(μον.6)**

ΘΕΜΑ Β

Β1.Να βρείτε τον $\lambda \in R$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{3-\lambda}{\lambda-1}\right)^x$ να έχει πεδίο ορισμού το R.Για ποια τιμή του λ η f είναι εκθετική; **(μον.5)**

Β2.Δίνεται η $f: A \to R$ με τύπο f(x)=$\sqrt{4\alpha x^2 - 2\alpha^2 x - 2}$. Αν το $1 \in A$,να βρείτε τον α και το πεδίο ορισμού της f. **(μον.7)**

Β3.Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f(x) + x - 2 = \sqrt{x^2-4x+3}$ να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον $x'x$. **(μον.8)**

Β4.Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f της f(x)=$x^4+x^3-4x^2+x+1$ με τους άξονες. Πότε η C_f βρίσκεται πάνω από τον $x'x$; **(μον.5)**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.Να βρεθούν οι ακέραιες τιμές του λ ώστε η διμελής σχέση

$f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & x\le \lambda^2-3\lambda+2 \\ x^2+3, & x\ge 2-\lambda \end{cases}$ να είναι συνάρτηση. **(μον.7)**

Γ2.Για λ=1 να σχεδιάσετε την C_f και να βρείτε το σύνολο τιμών. **(μον.5)**

Γ3.Δίνονται οι γραμμές με εξισώσεις $C_1: x^2+y^2=16$ και $C_2: y^2=4(x+3)$ **.**Να εξετάσετε αν είναι συναρτήσεις ως προς x και ως προς y. **(μον.8)**

Γ4.Στην περίπτωση που κάποια είναι να την σχεδιάσετε. **(μον.5)**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\le 1 \\ x-2, & x>1 \end{cases}$.

Να βρεθούν οι τιμές f(5), $f(-3)$, f(1), f(συνα)**,** και $f(2\alpha-3)$ **(μον.10)**

Δ2.α)Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α , Μ σημείο της ΒΓ και ΜΝ, ΜΡ οι κάθετες στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Αν ΜΒ=x να, εκφράσετε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΝΜΡ συναρτήσει του x. **(μον.8)**

β)Αν το εμβαδό είναι $E(x)=-\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha x+\frac{\sqrt{3}}{8}\alpha^2$ για ποιά τιμή του x το εμβαδό αυτό γίνεται μέγιστο; **(μον.3)**

γ)Για ποια τιμή του α το μέγιστο αυτό εμβαδό είναι ίσο με $\sqrt{3}$; **(μον.4)**

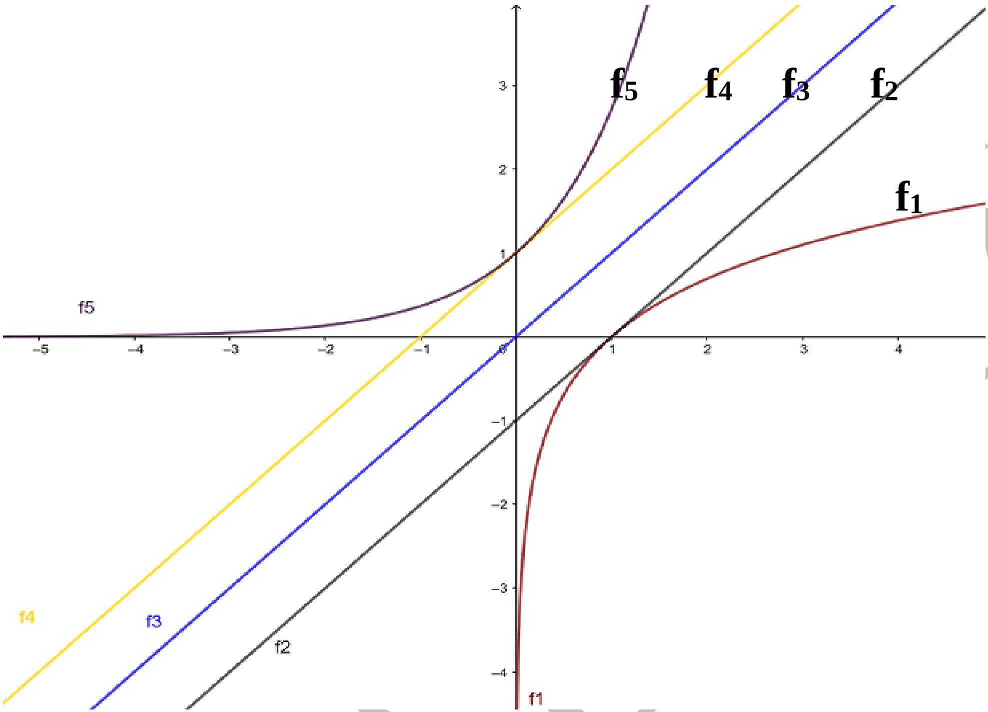
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

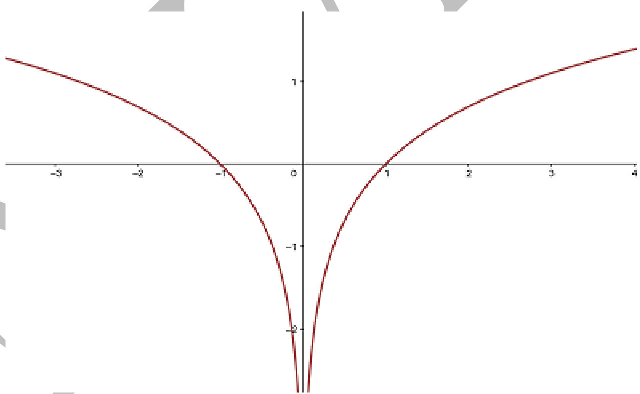
<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1.Θεωρία, σχολικό βιβλίο

Α2.



Α3.



Α4.Πρέπει $x^2+1\geq 0$ **(1)** που ισχύει για κάθε $x\in R$ και

$\sqrt{x^2+1}+x>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>-x$ **(2).**

Για την (2) έχω:

$x^2+1>x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq -x$ άρα $\sqrt{x^2+1}>-x \Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2+1}+x>0, \forall x\in R$. Είναι λοιπόν $A_f=R$.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι της μορφής α^x και για να έχει πεδίο ορισμού το R πρέπει να είναι $\left(\dfrac{3-\lambda}{\lambda-1}\right)>0$ και $\lambda-1\neq 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)(\lambda-1)>0 \overset{\text{ετερ.}}{\Longleftrightarrow} 1<\lambda<3$

Η f θα είναι εκθετική αν επιπλέον είναι $\dfrac{3-\lambda}{\lambda-1}\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3-\lambda\neq\lambda-1 \Leftrightarrow \lambda\neq 2$ άρα $\lambda\in(1,2)\cup(2,3)$.

Β2. Αφού το $1\in A$, έχει νόημα το $f(1)=\sqrt{4\alpha-2\alpha^2-2}$ οπότε είναι

$4\alpha-2\alpha^2+2\geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha+1\leq 0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2\leq 0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2=0$
$\Leftrightarrow \alpha=1$.

Για α=1 είναι $f(x)=\sqrt{4x^2-2x-2}$, οπότε πρέπει

$4x^2-2x-2\geq 0 \Leftrightarrow 2x^2-x-1\geq 0 \overset{\text{ομοσ.}}{\Longleftrightarrow} x\leq -\dfrac{1}{2}$ ή $x\geq 1$.

Αρα $A_f=\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$.

Β3. Αρχικά πρέπει $x^2-4x+3\geq 0 \overset{\text{ομοσ.}}{\Longleftrightarrow} x\leq 1$ ή ≥ 3 οπότε η f πεδίο ορισμού το $A_f=(-\infty,1]\cup[3,+\infty$. **(1)**

Η C_f είναι πάνω απ' τον x΄x όταν

$f(x)>0$ δηλ. $\sqrt{x^2-4x+3}-x+2>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4x+3}>x-2$. **(2)**

●Αν $x-2<0 \Leftrightarrow x<2 \overset{(1)}{\Rightarrow} x\in(-\infty,1]$, η (2) ισχύει.

●Αν $x-2>0 \Leftrightarrow x>2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x\in[3,+\infty)$, η (2) γίνεται:

$\left(\sqrt{x^2-4x+3}\right)^2>(x-2)^2 \Leftrightarrow x^2-4x+3>x^2-4x+4 \Leftrightarrow 3>4$

αδύνατο.

Τελικά η C_f βρίσκεται πάνω απ' τον x΄x αν $x\in(-\infty,1]$.

Β4. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A_f = R$.

●Για $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 1$ δηλ. η C_f τέμνει τον x΄x στο Κ(0,1).

●Για $y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$ **(1)**

Πιθανές ακέραιες ρίζες της (1) είναι οι ± 1. Το 1 είναι, οπότε με σχήμα Horner

1	1	-4	1	1	1
↓	1	2	-2	-1	
1	2	-2	-1	0	

η (1) γράφεται: $(x-1)(x^3 + 2x^2 - 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)[(x^3 - 1) + (2x^2 - 2x)] = 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)[(x-1)(x^2 + x + 1) + 2x(x-1)] = 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2(x^2 + 3x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Η C_f λοιπόν τέμνει τον x΄x στα σημεία

$\Lambda(1,0),\ M\left(\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ και $N\left(\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}, 0\right)$

Βρίσκεται πάνω απ' τον x΄x όταν

$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$		1		$+\infty$
	+	o	−	o	+	o	+	

Δηλ. $x \in \left(-\infty, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{-2+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right) - \{1\}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Για να είναι η f συνάρτηση πρέπει αρχικά να είναι $\lambda^2 - 3\lambda + 2 \le 2 - \lambda \Leftrightarrow$

$\lambda^2 - 2\lambda \le 0 \overset{\varepsilon\tau\varepsilon\rho.}{\Longleftrightarrow} 0 \le \lambda \le 2$ και επειδή λ ακέραιος είναι λ=0, 1, 2.

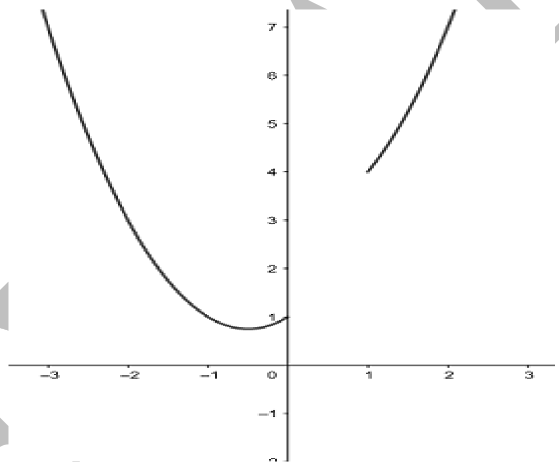
●Αν λ=0 είναι $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \le 2 \text{ με } f(2)=7 \\ x^2 + 3, & x \ge 2 \text{ με } f(2)=7 \end{cases}$ άρα είναι συνάρτηση.

●Αν λ=1 είναι $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \le 0 \\ x^2 + 3, & x \ge 1 \end{cases}$ και είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $A_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.

●Αν λ=2 είναι $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \le 0 \text{ με } f(0)=1 \\ x^2 + 3, & x \ge 0 \text{ με } f(0)=3 \end{cases}$ άρα δεν είναι συνάρτηση

Η f λοιπόν είναι συνάρτηση για λ=1.

Γ2.



Γ3.

►Για την C_1 έχουμε:

●Αν x=0⇒ $y = \pm 4$ άρα δεν είναι συνάρτηση ως προς x.

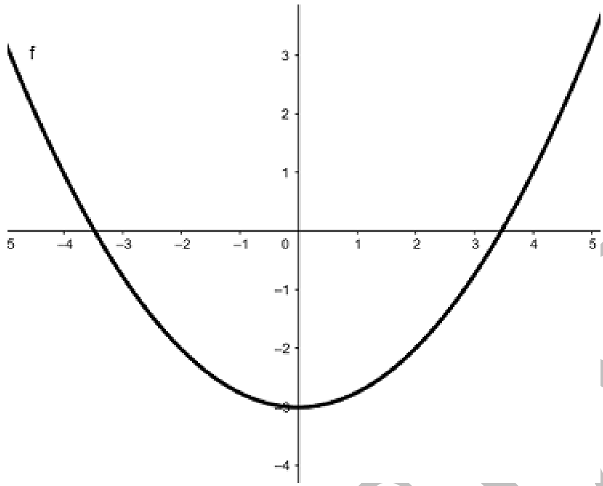
●Αν y=0⇒ $x = \pm 4$ άρα δεν είναι συνάρτηση ως προς y.

►Για την C_2 έχουμε:

●Αν x=1⇒ $y = \pm 4$ άρα δεν είναι συνάρτηση ως προς x.

●Είναι $y^2 = 4x + 12 \Leftrightarrow x = \dfrac{y^2 - 12}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}y^2 - 3$ οπότε η C_2 είναι συνάρτηση ως προς y με τύπο $f(y) = \dfrac{1}{4}y^2 - 3$ ή λόγω ΄΄συνήθειας΄΄ $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - 3$.

Γ4.



ΘΕΜΑ Δ

Δ1.Είναι:

●$f(5) = 5 - 2 = 3$ ●$f(-3) = (-3)^2 = 9$ ●$f(1) = 1^2 = 1 = 0$

●$f(συνα) = συν^2α - 1$ γιατί $συνα \le 1$

●Αν $2α - 3 \le 1 \Leftrightarrow α \le 2$ τότε $f(2α - 3) = (2α - 3)^2 - 1$

Αν $2α - 3 > 1 \Leftrightarrow α > 2$ τότε $f(2α - 3) = 2α - 3 - 2 = 2α - 5$.

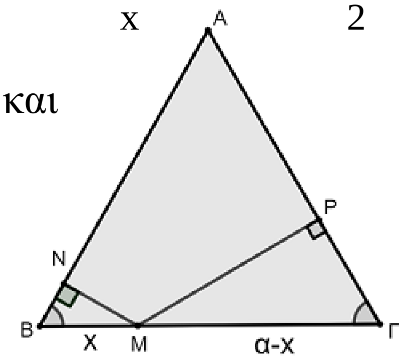
Δ2.

α)Αρχικά είναι:

$ημ60^o = \dfrac{MN}{x} \overset{BMN}{\Longrightarrow} MN = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$, $συν60^o = \dfrac{BN}{x} \overset{BMN}{\Longrightarrow} BN = \dfrac{1}{2}x$

$ημ60^o = \dfrac{MP}{(α - x)} \overset{ΓMN}{\Longrightarrow} MP = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(α - x)$ και

$συν60^o = \dfrac{ΓP}{(α - x)} \overset{BMN}{\Longrightarrow} ΓP = \dfrac{1}{2}(α - x)$.



Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:Ε=(ΑΒΓ) – (ΒΜΝ) – (ΓΜΡ)=

$$=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}(MN)\cdot(BN)-\frac{1}{2}(MP)\cdot(\Gamma P)=$$

$$=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x\cdot\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha-x)\frac{1}{2}\cdot(\alpha-x)=$$

$$=\ldots=-\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha\cdot x+\frac{\sqrt{3}}{8}\alpha^2.$$

β)Το τριώνυμο του εμβαδού έχει συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου του αρνητικό άρα παρουσιάζει μέγιστο στο

$$x=-\frac{\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}}{2\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}=\frac{\alpha}{2}.$$

γ)Το μέγιστο εμβαδόν είναι το $E\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\ldots=\frac{4\sqrt{3}}{3}$