ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **11**
Β' Λυκείου
Ον/μο:………………………. **ΕΠΑ.Λ.**
Ύλη: Συστήματα –Ιδιότητες Συναρτήσεων- Τριγωνομετρία **06-02-20**

Θέμα 1ο:

Α.i. Τι ονομάζουμε γραμμική εξίσωση; **(4 μον.)**

ii. Πότε μία συνάρτηση f ονομάζεται άρτια σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; **(5 μον.)**

iii. Να κατασκευάσετε ένα πινακάκι με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των $0^{\circ}, 30^{\circ}, 45^{\circ}, 60^{\circ}, 90^{\circ}$. **(6 μον.)**

Β. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** Σωστό ή **(Λ)** Λάθος τις παρακάτω προτάσεις :

i. Η εξίσωση $2x-4y^2=9$ είναι γραμμική. **Σ Λ**

ii. Αν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους έχει μοναδική λύση τότε $D\neq 0$. **Σ Λ**

iii. $\eta\mu\left(5\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **Σ Λ**

iv. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 > x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$. **Σ Λ**

v. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ$\left(A=90^{\circ}\right)$ ισχύει ότι

$\eta\mu B=\frac{A\Gamma}{B\Gamma}$. **Σ Λ**

(5x2=10 μον.)

Θέμα 2ο: Δίνεται το σύστημα: $\left.\begin{array}{l} x+2y=9 \\ 3x-7y=1 \end{array}\right\}$.

Α. Να λύσετε γραφικά το σύστημα. **(7 μον.)**

Β. Να λύσετε το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης. **(5 μον.)**

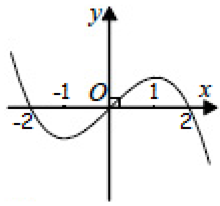
Γ. Να λύσετε το σύστημα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών. **(6 μον.)**

Δ. Να λύσετε το σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών. **(7 μον.)**

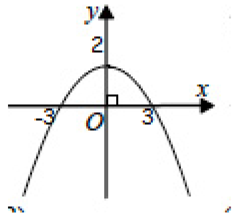
<u>Θέμα 3ο:</u>

Α. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τις συμμετρίες.

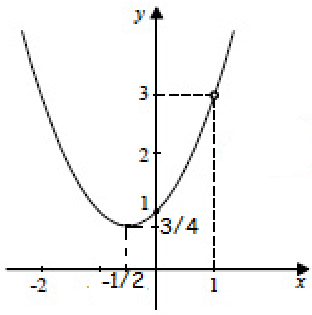
i.



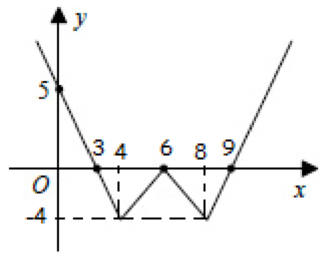
ii.



iii.



iv.



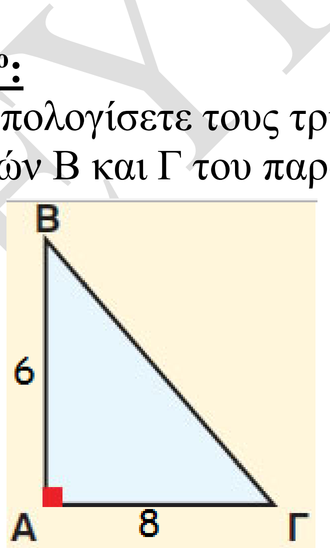
(4x4=16 μον.)

Β. Να παραστήσετε γραφικά σε ένα σύστημα συντεταγμένων, τις συναρτήσεις:

$\varphi(x)=|x|$, $\quad f(x)=|x|+2$, $\quad g(x)=|x-3|$ **(9 μον.)**

<u>Θέμα 4ο:</u>

Α. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών Β και Γ του παρακάτω σχήματος.



(12 μον.)

B. Να απλοποιήσετε την παράσταση :

$$A=\frac{\varepsilon\varphi(5\pi-\theta)\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{9\pi}{2}+\theta\right)\cdot\eta\mu\left(2017\pi+\theta\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{15\pi}{2}-\theta\right)\cdot\sigma\varphi(-\theta)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{23\pi}{2}+\theta\right)}.$$ **(6 μον.)**

Γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f\left(x\right)=\sigma\upsilon\nu x$. **(7 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1ο:

Α. i. Γραμμική εξίσωση ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής
$\alpha x + \beta y = \gamma$ με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$.

ii. Μία συνάρτηση f λέγεται άρτια σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για κάθε $x \in \Delta$ το $-x \in \Delta$, και ισχύει
ισχύει ότι $f(-x) = f(x)$.

iii.

Γωνία ω		Τριγωνομετρικοί αριθμοί			
σε μοίρες	σε rad	ημω	συνω	εφω	σφω
0°	0	0	1	0	Δεν ορίζεται
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Δεν ορίζεται	0

Β. i.Λ **ii.**Σ **iii.** Σ **iv.**Σ **v.**Σ

<u>Θέμα 2ο:</u>

Έχουμε το σύστημα $\left.\begin{array}{l} x+2y=9 \\ 3x-7y=1 \end{array}\right\}(\Sigma)$

Α. Θεωρούμε τις ευθείες $\varepsilon_1 : x+2y=9$ και $\varepsilon_2 : 3x-7y=1$. Θα κατασκευάσουμε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τις δύο ευθείες. Έχουμε τους εξής πίνακες τιμών των δύο ευθειών:

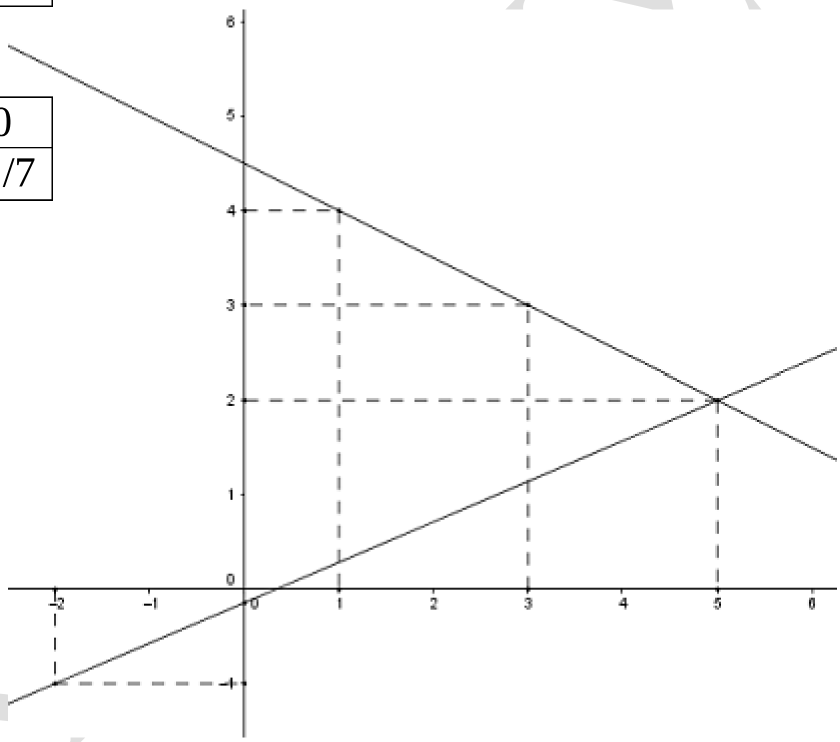
ε_1:

x	1	3
y	4	3

ε_2:

x	-2	0
y	-1	-1/7

Άρα έχουμε:



Δηλαδή (x,y)=(5,2).

Β.

$$\left.\begin{array}{l} x+2y=9 \\ 3x-7y=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2y+9 \\ 3(-2y+9)-7y=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2y+9 \\ -6y+27-7y=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-2y+9 \\ -6y-7y=1-27 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2y+9 \\ -13y=-26 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2y+9 \\ \dfrac{-13y}{-13}=\dfrac{-26}{-13} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2\cdot 2+9 \\ y=2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{l} x=5 \\ y=2 \end{array}\right).$$

Δηλαδή (x,y)=(5,2).

Γ.

$$\left.\begin{array}{l} x+2y=9 \\ 3x-7y=1 \end{array}\right\} \overset{\cdot(-3)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{l} -3x-6y=-27 \\ 3x-7y=1 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{l} -13y=-26 \\ x+2y=9 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{-13y}{-13}=\dfrac{-26}{-13} \\ x+2y=9 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} y=2 \\ x+2\cdot 2=9 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y=2 \\ x=5 \end{pmatrix}.$$

Δηλαδή (x,y)=(5,2).

Δ. Βρίσκουμε την ορίζουσα των συντελεστών του $\left.\begin{array}{l} x+2y=9 \\ 3x-7y=1 \end{array}\right\}(\Sigma)$.

Είναι: $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}=-7-6=-13\neq 0$, άρα το (Σ) έχει μοναδική λύση.

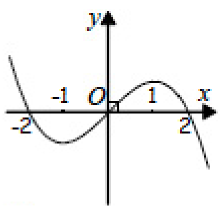
Θα βρούμε και τις άλλες ορίζουσες του (Σ). Έχουμε:

$D_x=\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}=-63-2=-65$ και $D_y=\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=1-27=-26$

Τότε η λύση του (Σ) είναι: $(x,y)=\left(\dfrac{D_x}{D},\dfrac{D_y}{D}\right)=\left(\dfrac{-65}{-13},\dfrac{-26}{-13}\right)=(5,2)$.

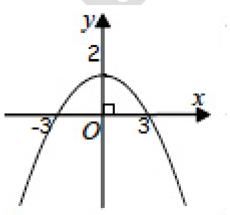
Θέμα 3ο:

Α.i.



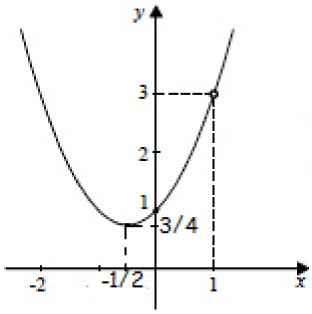
Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$ και στο $[1,+\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$. Δεν παρουσιάζει ολικά ακρότατα. Είναι περιττή εφόσον έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

ii.



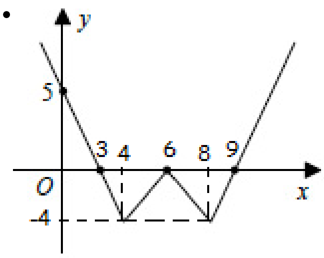
Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Παρουσιάζει ολικό μέγιστο το 2 για x=0. Είναι άρτια διότι έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

iii.



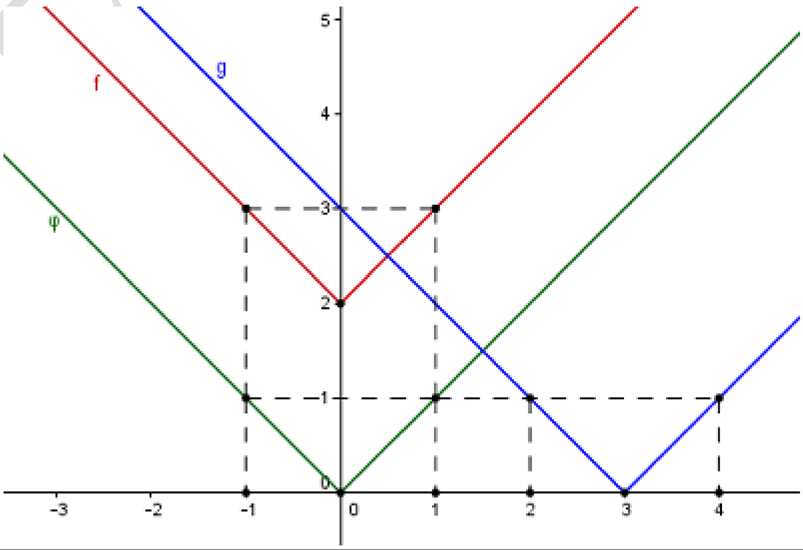
Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$. Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $\dfrac{3}{4}$ για $x=-\dfrac{1}{2}$. Δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

iv.



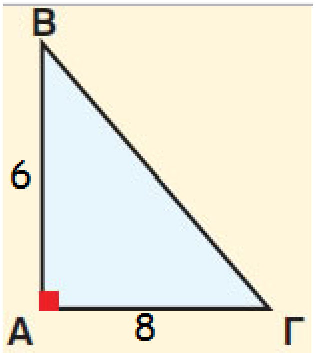
Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,4]$, γνησίως αύξουσα στο $[4,6]$, γνησίως φθίνουσα στο $[6,8]$ και γνησίως αύξουσα στο $[8,+\infty)$. Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το -4 για x=4 και για x=8. Δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

B. Έχουμε τις συναρτήσεις $\varphi(x)=|x|$, $f(x)=|x|+2$ και $g(x)=|x-3|$. Η f είναι μετατόπιση της φ κατά 2 μονάδες πάνω και η g μετατόπιση της φ κατά 3 μονάδες δεξιά.



Θέμα 4ο:

Α.



Από Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$\text{ΒΓ}^2 = \text{ΑΓ}^2 + \text{ΑΒ}^2 \Leftrightarrow \text{ΒΓ}^2 = 6^2 + 8^2 \Leftrightarrow \text{ΒΓ}^2 = 36 + 64 \Leftrightarrow \text{ΒΓ}^2 = 100 \Leftrightarrow$
$\text{ΒΓ} = \sqrt{100} \Leftrightarrow \text{ΒΓ} = 10$. Τότε:

$$\text{ημΒ} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\text{συνΒ} = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\text{εφΒ} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\text{σφΒ} = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Ομοίως είναι: $\text{ημΓ} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, $\text{συνΓ} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$,

$\text{εφΓ} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ και $\text{σφΓ} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

Β.

$$A = \frac{\text{εφ}(5\pi - \theta) \cdot \text{εφ}\left(\frac{9\pi}{2} + \theta\right) \cdot \text{ημ}\left(2017\pi + \theta\right)}{\text{συν}\left(\frac{15\pi}{2} - \theta\right) \cdot \text{σφ}(-\theta) \cdot \text{σφ}\left(\frac{23\pi}{2} + \theta\right)}$$

$$A = \frac{(-\text{εφ}\theta) \cdot (-\text{σφ}\theta) \cdot (-\text{ημ}\theta)}{(-\text{ημ}\theta) \cdot (-\text{σφ}\theta) \cdot (-\text{εφ}\theta)} = 1.$$

Γ. Η συνάρτηση $f(x) = συνx$ έχει :

∗ Πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

∗ Σύνολο τιμών το $B = [-1,1]$.

∗ Είναι περιοδική με περίοδο Τ=2π .

∗ Είναι άρτια , εφόσον $f(-x) = συν(-x) = συνx = f(x)$, οπότε έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

∗ Παρουσιάζει ολικό μέγιστο το y=1 για $x = 0$ και για $x = 2\pi$, ενώ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = \pi$.

∗ Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\pi, 2\pi]$.

∗ Η γραφική της παράσταση είναι :