

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

25

Ον/μο:.....

Γ' Λυκείου(ΕΠΑ.Λ)

Υλη: Διαφορικός Λογισμός -Στατιστική

03-01-21

Θέμα 1^ο:

A. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται συνεχής ; (5 μον.)

B. Έστω η συνάρτηση $F(x) = c \cdot f(x)$. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη , να αποδείξετε ότι : $F'(x) = c \cdot f'(x)$ (10 μον.)

Γ. Να χαρακτηρίσετε με (Σ) Σωστό ή (Λ) Λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

i. Αν οι συναρτήσεις f ,g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο A , τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ ορίζεται στο A . Σ Λ

ii. Αν η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο πραγματικό αριθμό , τότε ισχύει : $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ Σ Λ

iii. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ Σ Λ

iv. Οι ποιοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς . Σ Λ

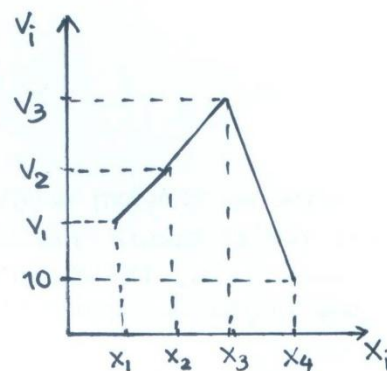
v. Η συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής x είναι αρνητικός αριθμός. Σ Λ

(5x2=10μον.)

Θέμα 2^ο:

Το διπλανό σχήμα παριστάνει το πολύγωνο συχνοτήτων των παρατηρήσεων x_i από έναν πληθυσμό μεγέθους $n=100$.

Αν ισχύει $2v_2 = v_1 + v_3$, τότε:



A. Να βρεθεί η διαφορά $N_3 - v_2$. (8 μον.)

B. Αν οι αριθμοί v_1, v_3 είναι ρίζες

$$\text{της εξίσωσης } x^2 - (v_1 + v_3) \cdot x + 800 = 0$$

να βρείτε τις συχνότητες όλων των παρατηρήσεων. (8 μον.)

Γ. Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα (9 μον.)

Θέμα 3^ο:

A. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ μεταβάλλεται έτσι ώστε το άθροισμα της βάσης του και του ύψους του να είναι σταθερό και ίσο με 50cm .

i. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει της βάσης

$$\text{του } x \text{ είναι } E(x) = 25x - \frac{x^2}{2}, \quad 0 < x < 50. \quad (6 \text{ μον.})$$

ii. Να βρείτε το μήκος της βάσης του, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου να είναι μέγιστο. Στην περίπτωση αυτή να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου.

(7 μον.)

B. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{2021}$.

i. Να βρείτε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^{2021} - 1}{h}$. (4 μον.)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0=1$. (5 μον.)

iii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - 2021x^{2019}}{x - 1}$. (3 μον.)

Θέμα 4^ο:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} + \alpha x^2 - \beta x + 6$, $x \in \mathbb{R}$ και

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ της οποίας η εφαπτομένη στο σημείο $M(3,6)$ είναι παράλληλη στον $x'x$.

A. Να δείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = -3$. (8 μον.)

B. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (7 μον.)

Γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(x)}{f''(x) + x^2 - 10x + 19}$. (6 μον.)

Δ. Να βρείτε πότε ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος. (4 μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (ενδεικτικές)

Θέμα 1^ο:

A. Σχ. Βιβλίο

B. Σχ. Βιβλίο

Γ. i. Λ ii. Λ iii. Σ iii. Λ iv. Λ

Θέμα 2^ο:

A. Γνωρίζουμε ότι $2v_2 = v_1 + v_3$ (1)

Επίσης $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 100 \xrightarrow{(1)} 2v_2 + v_2 + 10 = 100 \Rightarrow 3v_2 = 90 \Rightarrow$
 $v_2 = 30$. Επομένως $v_1 + v_3 = 60$ (3)

Είναι $N_3 - V_2 = (v_1 + v_2 + v_3) - v_2 = v_1 + v_3 \Rightarrow N_3 - V_2 = 60$

B. Αφού v_1, v_3 ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (v_1 + v_3)x + 800 = 0$, θα ισχύει $v_1 \cdot v_3 = 800$ (4) (σχέσεις Vieta) Από (3) και (4) προκύπτει

$v_3 = 40$, $v_1 = 20$ ($v_1 < v_2$)

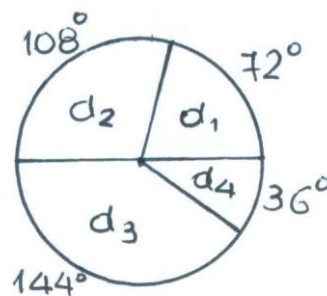
Γ. Είναι :

$$\alpha_1 = \frac{v_1}{v} \cdot 360^0 = \frac{20}{100} \cdot 360^0 = 72^0$$

$$\alpha_2 = \frac{v_2}{v} \cdot 360^0 = \frac{30}{100} \cdot 360^0 = 108^0$$

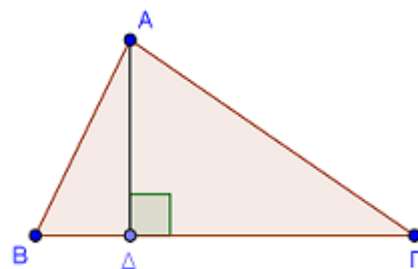
$$\alpha_3 = \frac{v_3}{v} \cdot 360^0 = \frac{40}{100} \cdot 360^0 = 144^0$$

$$\alpha_4 = \frac{v_4}{v} \cdot 360^0 = \frac{10}{100} \cdot 360^0 = 36^0$$



Θέμα 3^ο:

A. Έστω ABΓ το τρίγωνο και ΑΔ το ύψος του .
 Τότε αν θεωρήσουμε ΒΓ=x και ΑΔ=h
 έχουμε ότι : $x+h=50 \Leftrightarrow h=50-x$.



i. Είναι $E_{\text{τριγ}} = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2} = \frac{x \cdot h}{2}$ δηλαδή το εμβαδόν του τριγώνου

συναρτήσει του x είναι $E(x) = \frac{x \cdot (50 - x)}{2} = \frac{50x - x^2}{2} = 25x - \frac{x^2}{2}$

πρέπει $x > 0$ και $50 - x > 0$ οπότε $0 < x < 50$ δηλαδή

$$E(x) = 25x - \frac{x^2}{2}, \quad 0 < x < 50 .$$

ii. Θα μελετήσουμε τη συνάρτηση $E(x) = 25x - \frac{x^2}{2}, \quad 0 < x < 50$.

Βρίσκουμε την παράγωγο της συνάρτησης .

$E'(x) = 25 - x$.Στη συνέχεια βρίσκουμε τις ρίζες της παραγώγου.

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow 25 - x = 0 \Leftrightarrow x = 25 .$$

Τότε ο πίνακας προσήμων της E' είναι :

x	0	25	50
E'		+	-
E		↗	↘
		T.M	

Από τον παραπάνω πίνακα φαίνεται ότι το εμβαδόν τριγώνου γίνεται μέγιστο όταν το μήκος της βάσης είναι

x=25 . Το μέγιστο Εμβαδό είναι $E(25) = 25^2 - \frac{25^2}{2} = 312,5\tau.μ.$

B. i Είναι $f(x) = x^{2021}$.

$$\text{Τότε } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^{2021} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) .$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 2021x^{2020} \text{ οπότε } f'(1) = 2021 .$$

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0=1$ είναι :

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \quad (1) .$$

$$\text{Οπότε } f(1) = 1^{2021} = 1 \text{ και } f'(1) = 2021$$

$$\text{άρα η } (1) \Rightarrow y - 1 = 2021(x - 1) \Leftrightarrow y = 2021x - 2020$$

iii. Η παράγωγος της f είναι $f'(x) = (x^{2021})' = 2021x^{2020}$.

$$\begin{aligned} \text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - 2021x^{2019}}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2021x^{2020} - 2021x^{2019} \left(\frac{0}{0}\right)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2021x^{2019}(x - 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} 2021x^{2019} = 2021 . \end{aligned}$$

Θέμα 4^ο:

A. Είναι $f(x) = \frac{x^3}{3} + \alpha x^2 - \beta x + 6, \quad x \in \mathbb{R}$ και $f'(x) = x^2 + 2\alpha x - \beta$.

Εφόσον η C_f δέχεται εφαπτομένη στο $M(3,6)$ θα είναι

$$f(3) = 6 \Leftrightarrow 9 + 9\alpha - 3\beta + 6 = 6 \Leftrightarrow 9\alpha - 3\beta = -9 \Leftrightarrow 3\alpha - \beta = -3 \quad (1)$$

Επίσης εφόσον η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στον $x'x$

$$\text{Έχουμε : } f'(3) = 0 \Leftrightarrow 9 + 6\alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow 6\alpha - \beta = -9 \quad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει :

$$\left. \begin{array}{l} 3\alpha - \beta = -3 \\ 6\alpha - \beta = -9 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} (-) -3\alpha = 6 \\ 6\alpha - \beta = -9 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha = -2 \\ \beta = -3 \end{array} \right\}$$

Β. Για $\alpha=-2$ και $\beta=-3$ έχουμε :

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x + 3x + 6 \text{ και } f'(x) = x^2 - 4x + 3 .$$

Βρίσκουμε τις ρίζες της f' : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$. Ο πίνακας προσήμων της f' είναι :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
f'	+	○	-	○	+
f	↗		↘		↗
		T.M	T.E		

Η f είναι ↗ στα $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$ ενώ είναι ↘ στο $[1, 3]$

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 1 το $f(1) = \frac{1}{3} - 2 + 3 + 6 = \frac{22}{3}$

και τοπικό ελάχιστο στο 3 το $f(3) = 9 - 18 + 9 + 6 = 6$.

Γ. Είναι : $f''(x) = (x^2 - 4x + 3)' = 2x - 4$.

$$\begin{aligned} \text{Οπότε : } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(x)}{f''(x) + x^2 - 10x + 19} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{2x - 4 + x^2 - 10x + 19} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{x^2 - 8x + 15} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-3)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{x-5} = -1. \end{aligned}$$

Δ. Ο ρυθμός μεταβολής της f είναι η παράγωγος της , δηλαδή η f' .Θα μελετήσουμε την f' ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Για τις ρίζες της f'' έχουμε :

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.Ο πίνακας προσήμων της f'' είναι :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	-	○	+
f'	↘		↗
		O.E	