ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

24

Ον/μο:……………….. **Γ' Λυκείου(ΕΠΑ.Λ)**

Ύλη: Διαφορικός Λογισμός - Στατιστική **09-12-20**

Θέμα 1^{o}:

Α. Τι εκφράζει η αθροιστική συχνότητα N_i της τιμής x_i μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ; **(5 μον.)**

Β. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση ή καμπύλη μιας συνάρτησης f; **(5 μον.)**

Γ. Έστω $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ οι τιμές μίας μεταβλητής Χ και $f_1, f_2, ..., f_\kappa$ οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες των προηγούμενων τιμών .Να αποδείξετε ότι : **i.** $0 \le f_i \le 1$ για κάθε $i = 1, 2, ..., \kappa$.

ii. $f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = 1$. **(5 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** **Σωστό** ή **(Λ)** **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$ έχει ένα σημείο τομής με τον άξονα $x'x$. **Σ Λ**

ii. Αν για την τιμή x_3 μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ ισχύει $F_3\% = 20$, τότε συμπεραίνουμε ότι το 20% των παρατηρήσεων είναι ίσες με x_3. **Σ Λ**

iii. Για κάθε τιμή x_i, $i = 1, 2, ..., k$ μιας μεταβλητής Χ, ισχύει ότι $\nu_i > \nu$. **Σ Λ**

iv. Η συνάρτηση f με $f'(x) = (x-1)^2$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. **Σ Λ**

(4x1=4 μον.)

Ε. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

i. $\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_\kappa =$ ………………… .

ii. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^\nu =$ ………………… .

iii. $\left((x+3)^2\right)' =$ ……………………… .

(3x2=6 μον.)

Θέμα 2^{o}:

Α. Δίνεται οι συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x)=\dfrac{3x^2-9x+\kappa}{x^2-1},\ \kappa\in\mathbb{R}$
- $g(x)=\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-\lambda x},\ \lambda\in\mathbb{R}$
- Το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$ είναι το $(0,-6)$
- Η C_g διέρχεται από το $(1,2)$

i. Να αποδείξετε ότι κ=6 και λ=5. **(6 μον.)**

ii. Να βρείτε τους τύπους και τα πεδία ορισμού των f και g. **(4 μον.)**

iii. Να απλοποιήσετε τους τύπους των f και g. **(4 μον.)**

iv. Να προσδιορίσετε αν υπάρχουν, τα διαστήματα για τα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. **(4 μον.)**

Β. Δίνεται η συνάρτηση h με τύπο $h(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$

Να εξετάσετε αν η h είναι συνεχής για $x_0=0$. **(7 μον.)**

Θέμα 3^{o}:

Α. Οι επιδόσεις 50 υποψηφίων για την εγγραφή τους σε μία ιδιωτική σχολή ήταν: 6,7,8,9,5,1,4,7,3,9, 2,5,3,8,6,7,7,6,8,1, 3,0,1,4,9,0,9,8, 7,6,1,2,3,4,5,4,6,6,4,3,2,8,8,7,7,6,5,5,9,2

i. Κατασκευάστε πίνακα με $\nu_i, N_i, f_i\%, F_i\%$. **(5μον.)**

ii. Να βρείτε τους μαθητές και το ποσοστό των μαθητών που έγραψαν: **α.** το πολύ 5.
β. κάτω από 5.
γ. τουλάχιστον 5. **(3x2=6μον.)**

iii. Η σχολή αποφάσισε να πάρει το 36% των υποψηφίων. Τι βαθμό πρέπει να έχει γράψει κάποιος για να εγγραφεί; **(3μον.)**

Β. Σε κάποιο δείγμα μεγέθους ν οι τιμές μιας ποσοτικής μεταβλητής x_i είναι $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ και ισχύει ότι :

$$F_i\% = \frac{i^2+4}{\nu} \cdot 10^3$$, για κάθε $i = 1, 2, 3, 4$.

i. Να δείξετε ότι ν=200 . **(4 μον.)**

ii. Να σχηματίσετε πίνακα συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων , απόλυτων και σχετικών . **(7 μον.)**

Θέμα 4^o:

Α. Στην τρίτη τάξη ενός Λυκείου των Τρικάλων οι 50 μαθητές έγραψαν στις Πανελλήνιες εξετάσεις στο μάθημα Μαθηματικά και στοιχεία Στατιστικής , ως εξής :

- Όλοι οι μαθητές έγραψαν 15 ή 16 ή 17 ή 18 ή 19 ή 20
- Οι 45 μαθητές έγραψαν το πολύ 19
- Το 28% των μαθητών έγραψαν 19 ή 20
- Οι 30 μαθητές έγραψαν το πολύ 17
- Οι μαθητές που έγραψαν 16 είναι πενταπλάσιοι των μαθητών που έγραψαν 15
- Οι 27 μαθητές έγραψαν τουλάχιστον 17 αλλά το πολύ 19

Να κάνετε τον πίνακα συχνοτήτων ($\nu_i, f_i, f_i\%, F_i, F_i\%, N_i$) . **(10 μον.)**

Β. Έστω η ευθεία ε: $y = -2x + 14$, εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 9x + 10$ στο $x_0 = -1$.

i. Να αποδείξετε ότι α=1 και β=-2. **(5 μον.)**

ii. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλης στην ευθεία η: $y = -9x$. **(5 μον.)**

iii. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής της f. **(5 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

<u>Απαντήσεις (ενδεικτικές)</u>

<u>Θέμα 1</u>^{o}:

Α. Σχ. Βιβλίο

Β. Σχ. Βιβλίο

Γ. Σχ. Βιβλίο

Δ. i. Λ **ii.** Λ **iii.** Λ **iii.** Σ

Ε. i. $\nu_1+\nu_2+....+\nu_\kappa=\nu$. .

ii. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l_1$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\nu}=\left(l_1\right)^{\nu}$.

iii. $\left((x+3)^2\right)'=2x+6$.

<u>Θέμα 2</u>^{o}:

Α. i. Εφόσον η f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $(0,-6)$ θα είναι :

$$f(0)=-6 \Leftrightarrow \frac{3\cdot 0^2-9\cdot 0+\kappa}{0^2-1}=-6 \Leftrightarrow \frac{\kappa}{-1}=-6 \Leftrightarrow \kappa=6.$$

Επίσης, εφόσον η C_g διέρχεται από το $(1,2)$ θα είναι:

$$g(1)=2 \Leftrightarrow \frac{1^2-4\cdot 1-5}{1^2-\lambda}=2 \Leftrightarrow 2-2\lambda=-8 \Leftrightarrow \lambda=5.$$

ii. Για κ=6 είναι: $f(x)=\dfrac{3x^2-9x+6}{x^2-1}$. Για να ορίζεται η f πρέπει:

$x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \pm 1$, οπότε $A_f=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$.

Για λ=5 είναι: $g(x)=\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-5x}$. Για να ορίζεται η g πρέπει:

$x^2-5x\neq 0 \Leftrightarrow x(x-5)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$ και $x\neq 5$, οπότε $A_g=\mathbb{R}-\{0,5\}$

iii. Είναι:

$$f(x)=\frac{3x^2-9x+6}{x^2-1}=\frac{3\left(x^2-3x+2\right)}{(x-1)(x+1)}=\frac{3(x-2)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{3(x-2)}{x+1}$$

και $g(x)=\frac{x^2-4x-5}{x^2-5x}=\frac{(x-5)(x+1)}{x(x-5)}=\frac{x+1}{x}$.

iv. Για να βρίσκεται η C_f πάνω από τον άξονα $x'x$ πρέπει:

$$f(x)>0 \Leftrightarrow \frac{3(x-2)}{x+1}>0 \Leftrightarrow x<-1 \text{ ή } x>2$$

B. Έχουμε την $h(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}, & x\neq 0\\ 2 & , x=0\end{cases}$

Είναι: $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\frac{0}{2}=0$$

Επίσης, $h(0)=2$, οπότε εφόσον $\lim\limits_{x\to 0}h(x)\neq h(0)$, η h δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$.

<u>Θέμα 3ο</u>:

Α.i.

x_i	ν_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$
0	2	2	4	4
1	4	6	8	12
2	4	10	8	20
3	5	15	10	30
4	5	20	10	40
5	5	25	10	50
6	7	32	14	64
7	7	39	14	78
8	6	45	12	90
9	5	50	10	100
Άθροισμα	50	-	100	-

Όπου, $f_i = \dfrac{\nu_i}{\nu}$, $f_i\% = f_i \cdot 100$.

$N_1 = \nu_1,\ N_2 = N_1 + \nu_2$ κ.ο.κ.

$F_1 = f_1,\ F_2 = F_1 + f_2$ κ.ο.κ.

$F_i\% = F_i \cdot 100$

ii. α. Οι μαθητές που έγραψαν βαθμό το πολύ 5 είναι $N_6 = 25$ και το ποσοστό τους $F_6\% = 50\%$.

β. Οι μαθητές που έγραψαν βαθμό κάτω από 5 είναι $N_5 = 20$ και το ποσοστό τους $F_5\% = 40\%$.

γ. Οι μαθητές που έγραψαν βαθμό τουλάχιστον 5 είναι $\nu - N_5 = 50 - 20 = 30$ και το ποσοστό τους $100\% - F_5\% = 100\% - 40\% = 60\%$.

iii. Παρατηρούμε ότι: $f_{10}\% + f_9\% + f_8\% = 36\%$, οπότε για να εγγραφεί κάποιος στη σχολή πρέπει να έχει βαθμό τουλάχιστον 7.

B. i. Είναι $F_4\% = 100 \Leftrightarrow \dfrac{4^2+4}{v}\cdot 1000 = 100 \Leftrightarrow 20\cdot 1000 = 100v \Leftrightarrow v = 200$

ii. Για v=200 είναι : $F_1\% = \dfrac{1^2+4}{200}\cdot 1000 = 25\%$

$$F_2\% = \frac{2^2+4}{200}\cdot 1000 = 40\%$$

$$F_3\% = \frac{3^2+4}{200}\cdot 1000 = 65\%$$

$$F_4\% = 100\%$$

Οπότε , $f_1\% = F_1\% = 25\%$, $f_2\% = F_2\% - F_1\% = 15\%$

$f_3\% = F_3\% - F_2\% = 25\%$ και $f_4\% = F_4\% - F_3\% = 35\%$

Από τον τύπο $f_i = \dfrac{v_i}{v}$ βρίσκουμε τα v_1, v_2, v_3, v_4 και εφόσον

$N_1 = v_1$, $N_2 = N_1 + v_2$, κ.ο.κ έχουμε τον πίνακα :

x_i	v_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$	α_i
x_1	50	50	25	25	90
x_2	30	80	15	40	54
x_3	50	130	25	65	90
x_4	70	200	35	100	126
Σύνολο	**200**	**-**	**100**	**-**	**360**

Θέμα 4ο:

Α.

x_i	v_i	N_i	f_i	$f_i\%$	F_i	$F_i\%$
15	3	3	0,06	6	0,06	6
16	15	18	0,3	30	0,36	36
17	12	30	0,24	24	0,6	60
18	6	36	0,12	12	0,72	72
19	9	45	0,18	18	0,9	90
20	5	50	0,1	10	1	100
Σύνολο	50	-	1	100	-	-

- 50 μαθητές έγραψαν 15 ή 16 ή 17 ή 18 ή 19 ή 20 άρα ν=50
- 45 μαθητές έγραψαν το πολύ 19(δηλ 15 ή 16 ή 17 ή 18 ή 19) άρα $\boxed{v_1+v_2+v_3+v_4+v_5=45}$ (1)

  άρα $v_6=v-45=50-45=5$
- Το 28% των μαθητών , δηλαδή $\frac{28}{100}\cdot 50=14$ μαθητές έγραψαν 19 ή 20 άρα $v_5+v_6=14 \Leftrightarrow v_5=14-5 \Leftrightarrow v_5=9$
- 30 μαθητές έγραψαν το πολύ 17 (δηλ 15 ή 16 ή 17) άρα $\boxed{v_1+v_2+v_3=30}$ (2)
- Οι μαθητές που έγραψαν 16 είναι πενταπλάσιο των μαθητών που έγραψαν 15 , άρα $\boxed{v_2=5v_1}$ (3)
- 27 μαθητές έγραψαν τουλάχιστον 17 αλλά το πολύ 19(δηλ 17 ή 18 ή 19) άρα $\boxed{v_3+v_4+v_5=27}$ (4)

Η (1) $\underset{(4)}{\overset{(3)}{\Rightarrow}} v_1+v_2+v_3+v_4+v_5=45 \Leftrightarrow v_1+5v_1+27=45 \Leftrightarrow$

$6v_1=18 \Leftrightarrow v_1=3$

Άρα $v_2=5\cdot 3=15$

Όμως η (2) $\Rightarrow v_1+v_2+v_3=30 \Leftrightarrow v_3=30-18 \Leftrightarrow v_3=12$

άρα $v_4=50-(3+15+12+9+5)=6$

Οπότε για τις σχετικές συχνότητες έχουμε : $f_i=\frac{v_i}{v}$, $\quad f_i\%=f_i\cdot 100$

και για τις αθροιστικές : $N_1 = v_1, \quad N_2 = N_1 + v_2, ...$

$F_1 = f_1, \quad F_2 = F_1 + f_2, ...$

$F_i\% = F_i \cdot 100$

Β. i. Εφόσον η ευθεία ε: $y = -2x + 14$, εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 9x + 10$ στο $x_0 = -1$ θα είναι $f'(-1) = \lambda_\varepsilon = -2$ **(1)** και $f(-1) = -2(-1) + 14 = 16$ **(2)**

Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x - 9$,

Οπότε η $(1) \Rightarrow 3\alpha - 2\beta - 9 = -2 \Leftrightarrow 3\alpha - 2\beta = 7$ **(3)**. Επίσης, η $(2) \Rightarrow$ $-\alpha + \beta + 9 + 10 = 16 \Leftrightarrow -\alpha + \beta = -3$ **(4)**.

Λύνουμε το σύστημα των (3) και (4):

$$\left.\begin{array}{l} 3\alpha - 2\beta = 7 \\ -\alpha + \beta = -3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 3\alpha - 2\beta = 7 \\ -2\alpha + 2\beta = -6 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 3\alpha - 2\beta = 7 \\ \alpha = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \beta = -2 \\ \alpha = 1 \end{array}\right).$$

ii. Έστω $M(\omega, f(\omega))$ τα σημεία στα οποία η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f είναι παράλληλη στην ευθεία η: $y = -9x$.

Τότε: $f'(\omega) = -9 \Leftrightarrow 3\omega^2 - 4\omega - 9 = -9 \Leftrightarrow 3\omega^2 - 4\omega = 0 \Leftrightarrow$

$$\omega(3\omega - 4) = 0 \Leftrightarrow \omega = 0 \text{ ή } \omega = \frac{4}{3}.$$

Επομένως, τα ζητούμενα σημεία είναι $(0, f(0))$ και $\left(\frac{4}{3}, f\left(\frac{4}{3}\right)\right)$.

iii. Ο ρυθμός μεταβολής της f είναι: $f'(x) = 3x^2 - 4x - 9,\ x \in \mathbb{R}$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f''(x) = 6x - 4$.

Λύνουμε την εξίσωση: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

Ο πίνακας προσήμων είναι:

x	$-\infty$ 2/3	$+\infty$
f''	-	+
f'	↘	↗

Ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος για $x = \frac{2}{3}$ και η ελάχιστη τιμή του είναι: $f'\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{31}{3}$.