209
Γ' Λυκείου
Μαθ. Προσαν.
19-12-2020

Ον/μο:……………………….
Ύλη:Παράγωγοι

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β). Πότε λέμε ότι το σημείο $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f; **(μον.5)**

Α2. Διατυπώσετε τους κανόνες de l' Hospital για τη μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$. **(μον.5)**

Α3. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f. **(μον.5)**

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Αν για μια συνάρτηση f είναι $f'(x) = (x-1)^2(x-2)$ για κάθε $x \in R$, τότε το $f(1)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό με Σ ή Λ. **(μον.1)**
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α). **(μον.3)**

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με Σ ή Λ.

α) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

β) $\left(\alpha^x\right)' = x\alpha^{x-1}, \alpha > 0$.

γ) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x^3 + 2x - 1}{x - 4}$ έχει πλάγια ασύμπτωτη. **(μον.6)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$, x>0

Β1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **(μον.6)**

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς την καμπυλότητα και τα σημεία καμπής. **(μον.7)**

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και να την σχεδιάσετε. **(μον.7)**

Β4. Να δείξετε ότι $f(5^{x-1})\geq f(6^{x-1})$ για κάθε $x\in R$. **(μον.5)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\to R$ για την οποία ισχύει

η σχέση $x^2\cdot f^2(x)+2x\cdot f(x)\cdot \sigma\upsilon\nu x=\eta\mu^2 x$ για κάθε x στο $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}, & x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]\\ 0, & x=0\end{cases}$ **(μον.7)**

Γ2. Να βρείτε την f'. **(μον.5)**

Γ3. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. **(μον.7)**

Γ4. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του $\lambda\in R$, ώστε να ισχύει:

$\lambda|x|+\sigma\upsilon\nu x\geq 1,\ x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$. **(μον.6)**

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Εστω η κυρτή συνάρτηση $f(x)=(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\cdot e^x, \quad x\in R$,
όπου $\alpha,\beta,\gamma \in R, \alpha\neq 0$.

Δ1.Να αποδείξετε ότι $f''(x)\geq 0$ για κάθε $x\in R$. **(μον.5)**

Δ2.Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. **(μον.5)**

Δ3.Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f\left(\frac{1}{f(x)}\right)\cdot\ln(1+f(x))\right]$. **(μον.5)**

Δ4.Να δείξετε ότι $f(3)>f(1)+f'(2)$ **(μον.5)**

Δ5.Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=f(1)+f'(2),\ x\in R$
έχει ακριβώς μία ρίζα κι αυτή στο διάστημα (2,3). **(μον.5)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχ. Βιβλίο **Α2.** Σχ. Βιβλίο **Α3.** Σχ. Βιβλίο **Α4. α)** Ψ

β)Η $f'(x)=(x-1)^2(x-2)$ διατηρεί το πρόσημό της εκατέρωθεν του 1, οπότε δεν παρουσιάζει ακρότατο στη θέση αυτή.

Α5. α) Λάθος **β)** Λάθος **γ)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1.Η f έχει παράγωγο $f'(x)=-\dfrac{\ln x}{x^2}$ και αν $f'(x)\ge 0 \Rightarrow \ln x\le 0 \Leftrightarrow x\le 1$

έχουμε τον πίνακα μεταβολών όπου φαίνονται η μονοτονία και τα ακρότατα της f.

x	$-\infty$ A_1	1 A_2 $+\infty$
f'	+	–
f	↑	↓

M=f(1)=1

Β2.Είναι $f''(x)=\dfrac{2\ln x-1}{x^3}$ και αν $f''(x)\ge 0 \Leftrightarrow 2\ln x-1\ge 0 \Leftrightarrow$ $x\ge\sqrt{e}$ και η καμπυλότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον πίνακα.

x	$-\infty$ A_1	$\sqrt{e}$ A_2 $+\infty$
f''	–	+
f	$\cap$ **σ**	**κ** $\cup$

Β3.●Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ οπότε αναζητώ κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_o=0$. Είναι:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1+\ln x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln x\right)=(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$$ άρα

η x=0 δηλ. ο $y'y$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

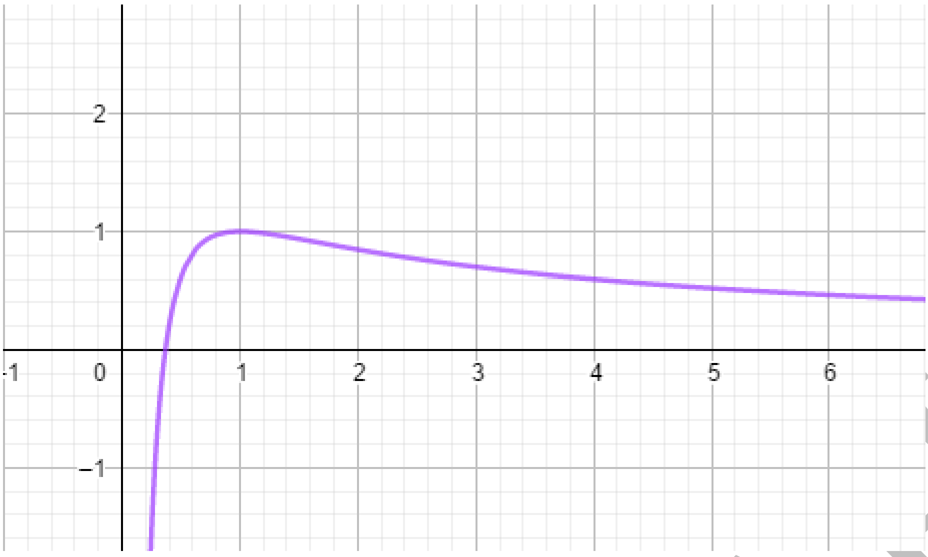
●Αναζητούμε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\ln x}{x}\overset{\frac{(+\infty)}{(+\infty)}}{\underset{LH}{===}}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$ οπότε η y=0 δηλ.

ο $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Αφού η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ δεν έχει πλάγια.

Η γραφική παράσταση είναι η:



Β4.●Αν $x \le 1 \Rightarrow x-1 \le 0 \Rightarrow 1 > 5^{x-1} \ge 6^{x-1} \underset{(0,1]}{\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}} f(5^{x-1}) \ge f(6^{x-1})$

●Αν $x > 1 \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow 1 < 5^{x-1} < 6^{x-1} \underset{(1,+\infty)}{\overset{f\downarrow}{\Rightarrow}} f(5^{x-1}) \ge f(6^{x-1})$

Αρα $f(5^{x-1}) \ge f(6^{x-1})$ για κάθε $x \in R$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.Η δοθείσα σχέση γράφεται:

$x^2 \cdot f^2(x) + 2x \cdot f(x) \cdot συνx + συν^2x = ημ^2x + συν^2x$ δηλ.

$(xf(x) + συνx)^2 = 1$ **(1).**

Η συνάρτηση $xf(x) + συνx$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

και δεν μηδενίζεται άρα διατηρεί πρόσημο. Απ' την (1) λοιπόν προκύπτει ότι $xf(x) + συνx = 1$ ή $xf(x) + συνx = -1$.

Για x=0 επαληθεύεται η πρώτη ισότητα άρα

$$xf(x) + συνx = 1 \Leftrightarrow xf(x) = 1 - συνx \overset{x \ne 0}{\Leftrightarrow} f(x) = \frac{1 - συνx}{x}.$$

Από τη συνέχεια της f στο $x_o = 0 \Rightarrow f(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$.

Αρα $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}, & x \in \left[-\dfrac{\pi}{2},0\right) \cup \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right] \\ 0 \quad , & x=0 \end{cases}$.

Γ2.Αν $x \neq 0$ είναι: $f'(x)=\dfrac{x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x^2}$ και

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2} \underset{LH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{==}} \lim_{x\to 0}\frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{2x} =$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\frac{\eta\mu x}{x}\right) = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Αρα $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x^2}, & \alpha\nu\ x \in \left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right] \\ \dfrac{1}{2} \quad , & \alpha\nu \quad x=0 \end{cases}$.

Γ3.Απ' το Γ2 αρκεί να δείξουμε ότι $x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1>0$.

Θεωρώ την $g(x) = x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1$ που έχει $g'(x)$=xσυνx με συμπεριφορά όπως στον πίνακα
Επειδή $g(x)\geq 0 \Rightarrow f'(x)\geq 0$ με το = να ισχύει μόνο για x=0.Αρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

x	$-\frac{\pi}{2}$ A_1 0	A_2 $\frac{\pi}{2}$
g'	–	+
g	↓	↑

m=g(0)=0

Γ4.Θέλω να ισχύει $\lambda\cdot|x|\geq 1-\sigma\upsilon\nu x$.

●Αν x=0 ισχύει το =.

●Αν $x \neq 0$ θέλω $\lambda \geq \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{|x|} \overset{1-\sigma\upsilon\nu x>0}{\Longleftarrow\!=\!\Longrightarrow} \lambda \geq \left|\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}\right| \Leftrightarrow |f(x)|\leq\lambda$ **(1)**

Ισχύει ότι:

$$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \le f(x) \le f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -\frac{2}{\pi} \le f(x) \le \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow \boxed{|f(x)| \le \frac{2}{\pi}} \; \textbf{(2)}$$

Από τις (1) και (2) , απ' το θέλω κι απ' το ισχύει προκύπτει ότι $\lambda_{min} = \frac{2}{\pi}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Επειδή η f είναι κυρτή και παραγωγίσιμη, η f' θα είναι γνησίως αύξουσα.

Ετσι αν $x, y \in R$, με $x<y \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(y) \Rightarrow f'(x) - f'(y) < 0 \Rightarrow$

$$\overset{x-y<0}{\Longrightarrow} \frac{f'(x) - f'(y)}{x-y} > 0 \Rightarrow \lim_{y\to x^+} \frac{f'(y) - f'(x)}{y-x} \ge 0 \Rightarrow f''(x) \ge 0, \forall x \in R .$$

Δ2. Είναι: $f'(x) = [\alpha x^2 + (2\alpha+\beta)x + \beta + \gamma]\cdot e^x$ οπότε αρκεί να είναι $f'(x) \ge 0,\ \forall x \in R$,άρα αρκεί το τριώνυμο της αγκύλης να έχει $\alpha > 0$ και $\Delta = 4\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0,\ \forall x \in R$ **(1).**

Η $f''(x) = [\alpha x^2 + (4\alpha+\beta)x + 2\alpha + 2\beta + \gamma]\cdot e^x$ είναι μη αρνητική $\forall x \in R$ άρα $\boldsymbol{\alpha > 0}$ και $\Delta_1 \le 0$ δηλ. $\Delta_1 = 8\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha\gamma \le 0$ **(2)**

δηλ. $4\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha\gamma + 4\alpha^2 \le 0 \Leftrightarrow 4\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha\gamma \le -4\alpha^2 < 0$ άρα ισχύει η (1).

Η f λοιπόν έχει $f'(x) > 0,\ \forall x \in R$ άρα είναι γνησίως αύξουσα.

Δ3. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} [(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\cdot e^x] \overset{(+\infty)\cdot 0}{===} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{e^{-x}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{LH}{==}}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2\alpha x + \beta}{-e^{-x}} \overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{\underset{LH}{==}} \lim_{x\to-\infty} \frac{2\alpha}{e^{-x}} = \frac{2\alpha}{+\infty} \overset{\alpha>0}{==} 0^+$$

. Εχουμε τώρα:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f\left(\frac{1}{f(x)}\right)\cdot \ln(1+f(x))\right] \overset{f(x)=u}{===} \lim_{x\to-\infty}\left[f\left(\frac{1}{u}\right)\cdot \ln(1+u)\right] \overset{\frac{1}{u}=y}{==}$$

$$\lim_{y\to+\infty}\left[f(y)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)\right]=\lim_{y\to+\infty}\left[\frac{f(y)}{y}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)}{\frac{1}{y}}\right]\overset{*}{=}(+\infty)\cdot 1=+\infty .$$

$$*\ \lim_{y\to+\infty}\frac{f(y)}{y}=\lim_{y\to+\infty}\left[\frac{\alpha y^2+\beta x+\gamma}{y}\cdot e^{y}\right]=(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$$

$$*\ \lim_{y\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)}{\frac{1}{y}}\overset{\frac{1}{y}=k}{==}\lim_{k\to0+}\frac{\ln(1+k)}{k}\underset{LH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{==}}\lim_{k\to0+}\frac{1}{1+k}=1$$

Δ4.Από Θ.Μ.Τ.$\Rightarrow \dfrac{f(3)-f(2)}{3-2}\overset{2<\xi<3}{===}f'(\xi)\underset{\xi>2}{\overset{f'\uparrow}{>}}f'(2)\Rightarrow f(3)-f(2)>f'(2)\Rightarrow$

$\Rightarrow f(3)>f(2)+f'(2)\underset{2>1}{\overset{f\uparrow}{>}}f(1)+f'(2)$ δηλ. $\mathbf{f(3)>f(1)+f'(2)}$

Δ5.Από Θ.Μ.Τ.$\Rightarrow \dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}\overset{1<x_o<2}{===}f'(x_o)\underset{x_o<2}{\overset{f'\uparrow}{<}}f'(2)\Rightarrow f(2)-f(1)<f'(2)$

$\Rightarrow f(2)<f(1)+f'(2)$ και λόγω του (**Δ4)** είναι $f(2)<f(1)+f'(2)<f(3)$ δηλ. ο αριθμός $f(1)+f'(2)$ είναι ενδιάμεση τιμή των $f(2)$ και $f(3)$. Σύμφωνα επομένως με το Θ.Ε.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένας $\mu\in(2,3)$ ώστε $f(\mu)=f(1)+f'(2)$.Άρα η εξίσωση $f(x)=f(1)+f'(2)$, λόγω και της μονοτονίας της f, έχει μοναδική λύση και μάλιστα στο (2,3).