ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **115**

Β' Λυκείου

Ον/μο:……………………… **Γεν. Παιδείας**

Ύλη: Συστήματα- Ιδιότητες συναρτήσεων - Τριγωνομετρία **19-12-20**

Θέμα 1ο:

A.i. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α λέγεται περιοδική στο Α; **(7 μον.)**

ii. Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$. **(8 μον.)**

iii. Τι ονομάζουμε τριγωνομετρικό κύκλο ; **(5 μον.)**

B. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** **Σωστό** ή **(Λ)** **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Το σύστημα $\begin{cases} xy = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις. **Σ** **Λ**

ii. Η συνάρτηση $f(x) = 3x^2$ είναι άρτια . **Σ** **Λ**

iii. Η συνάρτηση $g(x) = \varepsilon\varphi 5x$ έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{5}$. **Σ** **Λ**

iv. Ισχύει ότι : $\sigma\upsilon\nu\left(30\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. **Σ** **Λ**

v. Η συνάρτηση $\varphi(x-3)+2$ είναι μετατόπιση της φ κατά 3 μονάδες δεξιά και 2 μονάδες πάνω . **Σ** **Λ**

(5x1=5 μον.)

Θέμα 2ο:

A. Δίνεται το σύστημα: $\left.\begin{array}{l} \lambda^2 x - y = \lambda \\ x - \lambda y = \lambda^2 \end{array}\right\}(\Sigma)$.

i. Να βρεθεί το πλήθος των λύσεών του για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$. **(7 μον.)**

ii. Αν (x_0, y_0) η μοναδική λύση του συστήματος, να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία το $A(x_0, y_0)$ ανήκει στη διχοτόμο πρώτου και τρίτου τεταρτημορίου. **(6 μον.)**

B. Μία βιοτεχνία παιχνιδιών κατασκευάζει ποδηλατάκια με τρεις ρόδες και αυτοκινητάκια με τέσσερις ρόδες. Για τα δύο παιχνίδια χρησιμοποιεί τις ίδιες ρόδες. Αυτό το μήνα παρέλαβε 470 ρόδες και θέλει να κατασκευάσει συνολικά 130 παιχνίδια. Πόσα θα κατασκευάσει από κάθε είδος; **(12 μον.)**

Θέμα 3ο:

Α. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
ii. Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία.
iii. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης.
iv. Να εξετασθεί η συνάρτηση ως προς τις συμμετρίες.

(4x5=20 μον.)

Β. Έστω οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x)=x^3$ και $g(x)=x^3-3x^2+3x-7$.

i. Να βρείτε πόσες μονάδες κατακορύφως και πόσες οριζοντίως, έχει μετατοπιστεί η C_g σε σχέση με την C_f .

ii. Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως αύξουσες. **(2x2.5=5 μον.)**

Θέμα 4ο:

Α. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x-1}{1-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{1+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+1}$. **(5 μον.)**

Β. i. Να αποδείξετε ότι:

$$-\frac{3}{2}\varepsilon\varphi\frac{7\pi}{4}\cdot\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+4x\right)\right]-\eta\mu\frac{3\pi}{2}=3\eta\mu 4x+1$$

(4 μον.)

ii. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=-\frac{3}{2}\varepsilon\varphi\frac{7\pi}{4}\cdot\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+4x\right)\right]-\eta\mu\frac{3\pi}{2}.$$

Να γίνει η μελέτη αυτής της συνάρτησης σε διάστημα μίας περιόδου. **(7 μον.)**

Γ. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\sigma\varphi x=-\sqrt{3}$ **ii.** $\eta\mu\left(2x+\dfrac{\pi}{7}\right)=\dfrac{1}{2}$ **iii.** $2\sigma\upsilon\nu^2 x-9\sigma\upsilon\nu x+4=0$

(3x3=9 μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1^{o}:

Α. Σχ. Βιβλίο

Β. Σχ. Βιβλίο

Γ. Σχ. Βιβλίο

Δ. **i.**Λ **ii.**Σ **iii.** Λ **iv.**Σ **v.**Σ

Θέμα 2^{o}:

Α. i. Βρίσκουμε τις ορίζουσες του (Σ). Είναι:

$$D=\begin{vmatrix}\lambda^2 & -1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+1=1-\lambda^3=(1-\lambda)(1+\lambda+\lambda^2)$$

$$D_x=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ \lambda^2 & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^2+\lambda^2=0$$

$$D_y=\begin{vmatrix}\lambda^2 & \lambda\\ 1 & \lambda^2\end{vmatrix}=\lambda^4-\lambda=\lambda(\lambda^3-1)=\lambda(\lambda-1)(1+\lambda+\lambda^2)$$

*Αν $D\neq 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)\underbrace{(1+\lambda+\lambda^2)}_{\Delta<0}\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 1$ τότε το (Σ) έχει μοναδική λύση την $(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{0}{(1-\lambda)(1+\lambda+\lambda^2)},\frac{\lambda(\lambda-1)(1+\lambda+\lambda^2)}{(1-\lambda)(1+\lambda+\lambda^2)}\right)$ $=(0,-\lambda)$.

*Αν D=0$\Leftrightarrow \lambda=1$ τότε το (Σ) γίνεται: $\left.\begin{matrix}x-y=1\\ x-y=1\end{matrix}\right\}$.

Οπότε το (Σ) έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x,y)=(x,x-1), x\in\mathbb{R}$.

ii. Για να ανήκει το $A(x_0,y_0)$ δηλαδή το $A(0,-\lambda)$ στη διχοτόμου του 1^{ου} και του 3^{ου} τεταρτημορίου πρέπει να επαληθεύει την εξίσωσή της, δηλαδή την y=x. Οπότε: $y_0=x_0 \Leftrightarrow -\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=0$.

Β. Έστω x τα ποδηλατάκια και y τα αυτοκινητάκια. Τότε:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=130 \\ 3x+4y&=470 \end{aligned}\right\} \overset{\cdot(-3)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{aligned} -3x-3y&=-390 \\ 3x+4y&=470 \end{aligned}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} y=80 \\ x=50 \end{pmatrix}.$$

Άρα η βιοτεχνία θα κατασκευάσει 50ποδηλατάκια και 80 αυτοκινητάκια.

<u>Θέμα 3^o:</u>

Α. Δίνεται η $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

i. Για να ορίζεται η f πρέπει:

$$\underbrace{1-x^2\ge 0}_{x=1 \text{ ή } x=-1} \overset{\text{ετερ.του α}}{\Leftrightarrow} -1\le x\le 1.$$ Οπότε: $A=[-1,1]$.

ii. $\rightarrow$ Έστω $x_1,x_2\in[-1,0]$ με $x_1<x_2$. Τότε:

$$\mathbf{x_1<x_2} \Leftrightarrow x_1^2>x_2^2 \Leftrightarrow -x_1^2<-x_2^2 \Leftrightarrow 1-x_1^2<1-x_2^2 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{1-x_1^2}<\sqrt{1-x_2^2} \Leftrightarrow \mathbf{f(x_1)<f(x_2)}.$$

Δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα σ’ αυτό το διάστημα.

$\rightarrow$ Έστω $x_1,x_2\in[0,1]$ με $x_1<x_2$. Τότε:

$$\mathbf{x_1<x_2} \Leftrightarrow x_1^2<x_2^2 \Leftrightarrow -x_1^2>-x_2^2 \Leftrightarrow 1-x_1^2>1-x_2^2 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{1-x_1^2}>\sqrt{1-x_2^2} \Leftrightarrow \mathbf{f(x_1)>f(x_2)}.$$

Δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα σ’ αυτό το διάστημα.

iii. Είναι: $x^2\ge 0 \Leftrightarrow -x^2\le 0 \Leftrightarrow 1-x^2\le 1 \Leftrightarrow f(x)\le 1$.

Επομένως, η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το 1 για x=0.

Επίσης, η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=\pm 1$ το y=0.

iv. Το πεδίο ορισμού της f είναι $A=[-1,1]$. Οπότε

$\forall x\in A$ το $-x\in A$. Επίσης,

$\mathbf{f(-x)}=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2}=\mathbf{f(x)}$. Άρα η f είναι άρτια.

Β. Έχουμε τις συναρτήσεις f, g με $f(x)=x^3$ και $g(x)=x^3-3x^2+3x-7$ που ορίζονται σε όλο το $\mathbb{R}$.

i. Είναι: $g(x)=x^3-3x^2+3x-7=x^3-3x^2+3x-1-6=(x-1)^3-6$,

επομένως η γραφική παράσταση της g είναι μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 1 μονάδα δεξιά και 6 μονάδες κάτω.

ii. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τότε: $\mathbf{x_1 < x_2} \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow \mathbf{f(x_1) < f(x_2)}$ δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα. Το ίδιο θα ισχύει και για την g εφόσον η γραφική της παράσταση είναι μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f.

Θέμα 4ο:

A. $$\frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x - 1}{1 - \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x} = \frac{1 + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x + 1} \Leftrightarrow$$

$$(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x - 1)(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x + 1) = (1 - \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)(1 + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \Leftrightarrow$$

$$(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)^2 - 1 = 1 - (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu^2 x - 1 = 1 - \eta\mu^2 x - 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow$$

$0 = 1 - 1 \Leftrightarrow 0 = 0$ που ισχύει.

B. i. $$-\frac{3}{2}\varepsilon\varphi\frac{7\pi}{4}\cdot\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right)\right] - \eta\mu\frac{3\pi}{2} =$$

$$-\frac{3}{2}\varepsilon\varphi\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)\cdot\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right)\right] - \eta\mu\frac{3\pi}{2} =$$

$$\frac{3}{2}\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\cdot(\eta\mu 4x + \eta\mu 4x) + 1 = \frac{3}{2}\cdot 1\cdot 2\eta\mu 4x + 1 = 3\eta\mu 4x + 1$$

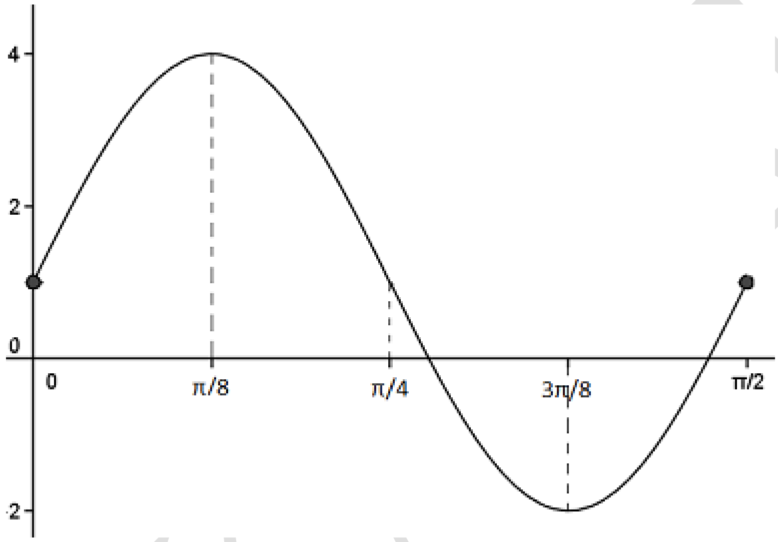
ii. Σύμφωνα με το i. ερώτημα είναι $f(x) = 3\eta\mu 4x + 1$.

* Η f έχει πεδίο ορισμού το $A_f = \mathbb{R}$.
* Η f έχει σύνολο τιμών το $B = [-2, 4]$.
* Η f είναι γν.αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{8}\right]$ και στο $\left[\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right]$, ενώ είναι γν.φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right]$.
* Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το 4 για $x = \frac{\pi}{8}$ και ολικό ελάχιστο το -2 για $x = \frac{3\pi}{8}$.
* Η f δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

* Η f είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

* Για τη γραφική παράσταση της f είναι $\beta = \frac{T}{4} = \frac{\frac{\pi}{2}}{4} = \frac{\pi}{8}$ οπότε:

x	0	π/8	π/4	3π/8	π/2
4x	0	π/2	π	3π/2	2π
ημ4x	0	1	0	-1	0
3ημ4x	0	3	0	-3	0
3ημ4x+1	1	4	1	-2	1



Γ.i. $\sigma\varphi x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \sigma\varphi x = -\sigma\varphi\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \sigma\varphi x = \sigma\varphi\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

ii. $\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{7}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{7}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

$2x + \frac{\pi}{7} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$ ή $2x + \frac{\pi}{7} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

$2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{42} \Leftrightarrow$ ή $2x = 2\kappa\pi + \frac{29\pi}{42} \Leftrightarrow$

$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{84}, \kappa \in \mathbb{Z}$ ή $x = \kappa\pi + \frac{29\pi}{84}, \kappa \in \mathbb{Z}$

iii. $2\sigma\upsilon\nu^2 x - 9\sigma\upsilon\nu x + 4 = 0 \underset{\sigma\upsilon\nu x = \omega}{\overset{\Theta\acute{\varepsilon}\tau o \upsilon\mu\varepsilon}{\Leftrightarrow}} 2\omega^2 - 9\omega + 4 = 0$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 81 - 32 = 49 > 0$.

Άρα έχει δύο άνισες λύσεις τις $\omega_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{9 \pm 7}{4}$, άρα

$\omega_1 = 4$ ή $\omega_2 = \dfrac{1}{2}$. Τότε:

Η $\sigma\upsilon\nu x = 4$ είναι αδύνατη. Οπότε έχουμε:

$\sigma\upsilon\nu x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \dfrac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$.