ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

99

Ύλη:Διανύσματα-Συντεταγμένες **Β΄ Λυκείου**

Ον/μο:………………… **Θετ.-Τεχν. Κατ.**

7-11– 2020

ΘΕΜΑ Α

Α1 . 1. Να σχηματίσετε το άθροισμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και τη διαφορά $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

2. Να πάρετε τρία διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$.

3. Να σχεδιάσετε τη γωνία δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και να γράψετε τις τιμές που αυτή παίρνει.

4. Γράψτε την τριγωνική ανισότητα για το μέτρο του αθροίσματος των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Στη συνέχεια συμπληρώστε τα κενά :

α) Αν $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ τότε ……………..

β) Αν $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=\big||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\big|$ τότε……………

(μον.16)

Α2. Δίνονται τέσσερα σημεία Α , Β ,Γ και Δ και έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{\delta}$ τα αντίστοιχα διανύσματα θέσεως ως προς ένα σημείο αναφοράς Ο.

Τι μπορείτε να πείτε για το τετράπλευρο ΑΒΓΔ αν :

1. $\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=\vec{\beta}+\vec{\delta}$ **2.** $|\vec{\alpha}-\vec{\gamma}|=|\vec{\beta}-\vec{\delta}|$

3. $\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=\vec{\beta}+\vec{\delta}$ και $|\vec{\alpha}-\vec{\gamma}|=|\vec{\beta}-\vec{\delta}|$

(μον.9)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με σωστό ή λάθος

1. Αν Μ μέσον του τμήματος ΑΒ , τότε : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}$ Σ Λ

2. Αν $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ Σ Λ

3. Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha}|=|\lambda|\cdot|\vec{\beta}|$ τότε $\vec{\alpha}=-|\lambda|\cdot\vec{\beta}$ Σ Λ

4. Αν $\lambda\cdot\vec{\alpha}=\mu\cdot\vec{\alpha}$ τότε $\lambda=\mu$ Σ Λ

5. Το μηδενικό διάνυσμα είναι ομόρροπο σε κάθε άλλο διάνυσμα Σ Λ

(μον.10)

Β2. Αν $\overrightarrow{AK}+3\overrightarrow{BK}-2\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B\Lambda}+3\overrightarrow{AM}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ , Λ και Μ είναι συνευθειακά . **(μον.7)**

Β3. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ , αντιστοίχως ενός τετράπλευρου ΑΒΓΔ , να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=4\overrightarrow{MN}$. **(μον.8)**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\lambda^2-2\lambda,\ \lambda)$ και $\vec{\beta}=(\kappa^2-4\kappa+5,\ \mu-1)$.
Να βρείτε τα κ ,λ , μ ώστε

1. τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ να είναι αντίθετα.

2. το $\vec{\alpha}$ να μην είναι το μηδενικό διάνυσμα.

3. $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ και $\vec{\alpha}\,//\,y'y$. **(μον.9)**

Γ2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\lambda-2,1)$ και $\vec{\beta}=(-8,4-2\lambda)$

1. Να βρείτε το λ ώστε $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}$. **(μον.6)**

2. Για λ=5 να βρείτε το διάνυσμα που να είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο διπλάσιο του $\vec{\beta}$. **(μον.5)**

3. Έστω τα σημεία $A(-1,\mu)$ και $B(-3,\mu+2)$.Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης λ του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ καθώς και τη γωνία του.

(μον.5)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(3,4)$, $\vec{\beta}=(-2,1)$, $\vec{\gamma}=(4,-2)$.
Να εκφράσετε το $\vec{\beta}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$. **(μον.8)**

Δ2. Αν $\vec{\alpha}=(-1,2)$ και $\vec{\beta}=(2,-3)$ να υπολογίσετε το μέτρο του
$\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+|\vec{\gamma}|\cdot\vec{\beta}$. **(μον.10)**

Δ3. Αν $A(-3,1)$, $B(\mu,3)$ και $\Gamma(-5,1-\mu)$ να βρείτε τις τιμές
του μ ώστε τα σημεία Α, Β, Γ να είναι κορυφές τριγώνου. **(μον.7)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

Α1. 1. Σχολικό σελ. 16 και 18. **2.** Σχολικό σελ. 17. **3.** Σχολικό σελ. 14.

4. Σχολικό σελ. 19.

α) $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right| \Leftrightarrow \vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ **β)** $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|\left|\vec{\alpha}\right|-\left|\vec{\beta}\right|\right| \Leftrightarrow \vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$

Α2. 1. Έχουμε : $\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=\vec{\beta}+\vec{\delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Delta} \Leftrightarrow$
$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{O\Delta}-\overrightarrow{O\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ δηλ $BA=//\Gamma\Delta$ οπότε
το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο .

2. Έχουμε : $\left|\vec{\alpha}-\vec{\gamma}\right|=\left|\vec{\beta}-\vec{\delta}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{O\Gamma}\right|=\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{O\Delta}\right| \Leftrightarrow$
$\left|\overrightarrow{\Gamma A}\right|=\left|\overrightarrow{\Delta B}\right|$ δηλ . οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ είναι ίσες .

3. Έχουμε : $\left.\begin{array}{l}\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=\vec{\beta}+\vec{\delta}\\ \left|\vec{\alpha}-\vec{\gamma}\right|=\left|\vec{\beta}-\vec{\delta}\right|\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\text{ΑΒΓΔ παρ/μο}\\ \text{διαγώνιοι ίσες}\end{array}\right\} \Rightarrow$ ΑΒΓΔ ορθογώνιο .

ΘΕΜΑ Β

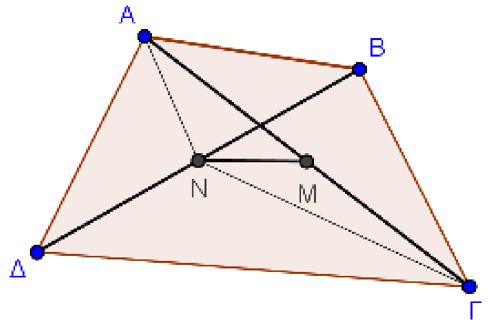
Β1. 1Σ , **2**Σ , **3**Σ , **4**Λ , **5**Σ .

Β2. Έχουμε : $\overrightarrow{AK}+3\overrightarrow{BK}-2\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B\Lambda}+3\overrightarrow{AM}$ οπότε (σημείο αν. το Α)
$\overrightarrow{AK}+3\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}\right)-2\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A\Lambda}+3\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow$
$\overrightarrow{AK}+3\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{AK}-2\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{A\Lambda}+3\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow$
$4\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{A\Lambda}+4\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AK}-4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{A\Lambda}-\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow$
$4\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{M\Lambda} \Leftrightarrow \overrightarrow{M\Lambda}//\overrightarrow{MK}$ με κοινό άκρο το Μ .
Άρα τα Κ , Λ , Μ συνευθειακά .

Β3. Είναι : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}\overset{\overset{\triangle}{AB\Delta}}{\underset{\underset{\triangle}{B\Gamma\Delta}}{=}}$

$= 2\overrightarrow{AN}+2\overrightarrow{\Gamma N}=2\left(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{\Gamma N}\right)=$

$= -2\left(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{N\Gamma}\right)\overset{\overset{\triangle}{NA\Gamma}}{=}-2\cdot 2\overrightarrow{NM}=4\overrightarrow{MN}$



<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. 1. $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ αντίθετα άρα : $\begin{cases}\lambda^2-2\lambda=-\kappa^2+4\kappa-5 & (1)\\ \lambda=-\mu+1 & (2)\end{cases}$

Από (1) $\Rightarrow\left(\lambda^2-2\lambda+1\right)+\left(\kappa^2-4\kappa+4\right)=0\Leftrightarrow$

$(\lambda-1)^2+(\kappa-2)^2=0\Leftrightarrow$ $\lambda=1$ και $\kappa=2$.

Η (2) $\Rightarrow 1=-\mu+1\Leftrightarrow$ $\mu=0$.

2. Είναι: $\vec{\alpha}\neq 0$ όταν δεν είναι συγχρόνως $\lambda^2-2\lambda=0$ και $\lambda=0$ άρα $\lambda=0$.

Το $\vec{\alpha}$ λοιπόν δεν είναι μηδενικό διάνυσμα αν $\lambda\neq 0$.

3. Είναι $\vec{\alpha}\neq 0$ και $\vec{\alpha}$ //y΄y όταν $\lambda\neq 0$ και $\lambda^2-2\lambda=0$ δηλ. αν $\lambda=2$.

Γ2. 1.είναι $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$ όταν

$\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1\\ -8 & 4-2\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(\lambda-2)(4-2\lambda)+8=0\Leftrightarrow 4\lambda-2\lambda^2-8+4\lambda+8=0$

$\Leftrightarrow 2\lambda^2-8\lambda=0$ $2\lambda(\lambda-4)=0\Leftrightarrow$ $\lambda=0$ ή $\lambda=4$

2. Αν $\lambda=5$ τότε $\vec{\alpha}=(3,1)$ και $\vec{\beta}=(-8,-6)$.

Έστω $\vec{v}$ ομόρροπο στο $\vec{\alpha}$ οπότε $\vec{v}=\lambda\cdot(3,1)=(3\lambda,\lambda)$, $\lambda>0$

και $\left|\vec{v}\right|=2\left|\vec{\beta}\right|$ δηλ $\sqrt{(3\lambda)^2+\lambda^2}=2\cdot\sqrt{(-8)^2+(-6)^2}\Leftrightarrow$

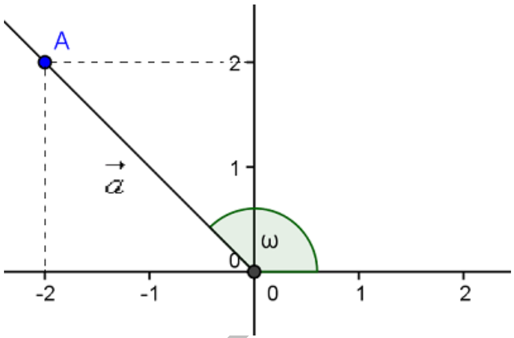
$10\lambda^2=4\cdot 100\Leftrightarrow\lambda^2=40$ άρα $\lambda=\sqrt{40}$ δηλ $\lambda=2\sqrt{10}$

Έτσι $\vec{v}=2\sqrt{10}\cdot(3,1)=\left(6\sqrt{10},2\sqrt{10}\right)$.

3. Είναι : $\overrightarrow{AB} = (-3+1, \mu+2-\mu) = (-2,2)$

οπότε $\lambda_{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{2}{-2}$ δηλ $\lambda_{\overrightarrow{AB}} = -1$.

Η διανυσματική ακτίνα του $\overrightarrow{AB}$ είναι στο 4^0 τεταρτημόριο οπότε η γωνία του είναι : $\omega = \pi - \dfrac{\pi}{4}$ δηλ $\omega = \dfrac{3\pi}{4}$



<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Εστω ότι $\vec{\beta} = \kappa \cdot \vec{\alpha} + \lambda \cdot \vec{\gamma}$ οπότε

$(-2,1) = \kappa \cdot (3,4) + \lambda \cdot (4,-2) \Rightarrow (-2,1) = (3\kappa + 4\lambda, 4\kappa - 2\lambda) \Rightarrow$

$3\kappa + 4\lambda = -2$ και $4\kappa - 2\lambda = 1 \Rightarrow \kappa = 0$ και $\lambda = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \vec{\beta} = -\dfrac{1}{2}\vec{\gamma}$.

Δ2. Είναι: $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + |\vec{\gamma}| \cdot \vec{\beta}$ και αν $\vec{\gamma} = (x, y)$ τότε

$(x, y) = (-1,2) + |\vec{\gamma}|(2,-3) \Rightarrow (x, y) = (-1+2|\vec{\gamma}|, 2-3|\vec{\gamma}|) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x = -1+2|\vec{\gamma}| \\ y = 2-3|\vec{\gamma}| \end{array}\right| \Rightarrow |\vec{\gamma}|^2 = \left(-1+2|\vec{\gamma}|\right)^2 + \left(2-3|\vec{\gamma}|\right)^2 \Rightarrow$$

$12|\vec{\gamma}|^2 - 16|\vec{\gamma}| + 5 = 0 \Rightarrow |\vec{\gamma}| = \dfrac{5}{6}$ ή $|\vec{\gamma}| = \dfrac{1}{2}$

Δ3. Για να είναι τα σημεία Α, Β, Γ κορυφές τριγώνου πρέπει να μην είναι συνευθειακά.

Είναι: $\overrightarrow{AB} = (\mu+3, 2)$, $\overrightarrow{A\Gamma} = (-2, -\mu)$ και $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} \mu+3 & 2 \\ -2 & -\mu \end{vmatrix} =$

$= -\mu^2 - 3\mu + 4$. Πρέπει $-\mu^2 - 3\mu + 4 \neq 0 \Rightarrow \mu \neq 1$ και $\mu \neq -4$.