ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

23

Ον/μο:……………….. **Γ' Λυκείου(ΕΠΑ.Λ)**

Ύλη: Διαφορικός Λογισμός **07-11-20**

<u>Θέμα 1^ο</u>:

Α. Πότε μία συνάρτηση f λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; **(5 μον.)**

Β. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε παράγωγο της συνάρτησης f; **(5 μον.)**

Γ. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x^2$ είναι ίση με $f'(x)=2x,\ x\in\mathbb{R}$. **(5 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Για ένα σημείο M(x,y) του επιπέδου των αξόνων xOy που ανήκει στην γραφική παράσταση της f, ισχύει $f(x)=y$. **Σ Λ**

ii. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο x_0 είναι ο αριθμός $f'(x_0)$. **Σ Λ**

iii. Η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$. **Σ Λ**

iv. Αν για μία συνάρτηση f ισχύει ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε ισχύει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. **Σ Λ**

(4x1=4 μον.)

Ε. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

i. $\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=$..................... .

ii. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l_1$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\nu]{f(x)}=$...................... .

iii. $\left(\eta\mu\left(x^2+1\right)\right)'=$........................... .

(3x2=6 μον.)

Θέμα 2ο:

Δίνεται οι συναρτήσεις f και g με $f(x)=x^2-6x+5$ και $g(x)=x^2-3x+2$.

Α. Να προσδιορίσετε τα σημεία στα οποία οι C_f και C_g τέμνουν τον άξονα $x'x$. **(4 μον.)**

Β. Να ορίσετε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$. **(4 μον.)**

Γ. Να υπολογίσετε τα $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)$ και $\lim\limits_{x\to 5}\varphi(x)$. **(6 μον.)**

Δ. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της C_φ που να σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$. **(8 μον.)**

Ε. Να μελετήσετε τη $\varphi(x)$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **(3 μον.)**

Θέμα 3ο:

Α. Μία χειρουργική μάσκα αποτελείται από ένα ύφασμα σχήματος ορθογωνίου και από δύο λάστιχα. Το ορθογώνιο μέρος της μάσκας έχει εμβαδό 169cm^2.

i. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογώνιου τμήματος της μάσκας, ώστε η περίμετρός του να είναι ελάχιστη. **(10 μον.)**

ii. Να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της περιμέτρου, του ορθογώνιου τμήματος της μάσκας, διαρκώς αυξάνεται. **(5 μον.)**

Β. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-3x+2}, & x\neq 2, x\neq 1\\ \lambda x^2-5x-\dfrac{4}{3}, & x=2\end{cases}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. **(3 μον.)**

ii. Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=2$. **(7 μον.)**

Θέμα 4ο:

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\sqrt{x^2-2x+10}$.

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. **(2 μον.)**

Β. Να αποδείξετε ότι: $f'(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}$. **(3 μον.)**

Γ. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να δείξετε ότι $f(x)\geq 3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. **(10 μον.)**

Δ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(5,f(5))$. **(6 μον.)**

Ε. Αν Α, Β είναι τα σημεία τομής της εφαπτομένης ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β. **(4 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (ενδεικτικές)

Θέμα 1ο:

Α. Σχ. Βιβλίο

Β. Σχ. Βιβλίο

Γ. Σχ. Βιβλίο

Δ. i. Σ **ii.** Σ **iii.** Λ **iii.** Σ

Ε. **i.** $\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$.

ii. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l_1$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[v]{f(x)}=\sqrt[v]{l_1}$, $l_1\geq 0$.

iii. $\left(\eta\mu\left(x^2+1\right)\right)'=2x\sigma\upsilon\nu\left(x^2+1\right)$.

Θέμα 2ο:

Α. Η $f(x)=x^2-6x+5$ έχει πεδίο ορισμού το $A_f=\mathbb{R}$. Για να τέμνει τον άξονα $x'x$ πρέπει $f(x)=0\Leftrightarrow x^2-6x+5=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=5$.
Άρα τα σημεία είναι Α(1,0) και Β(5,0).
Η $g(x)=x^2-3x+2$ έχει πεδίο ορισμού το $A_g=\mathbb{R}$. Για να τέμνει τον άξονα $x'x$ πρέπει $g(x)=0\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$.
Άρα τα σημεία είναι Δ(1,0) και Ε(2,0).

Β. Το πεδίο ορισμού των f και g είναι το $\mathbb{R}$, οπότε για να ορίζεται η $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ αρκεί να ισχύει:

$g(x)\neq 0\Leftrightarrow x^2-3x+2\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$ και $x\neq 2$.

Η φ έχει πεδίο ορισμού το $A_\varphi=\mathbb{R}-\{1,2\}$ και τύπο:

$$\varphi(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2-6x+5}{x^2-3x+2}=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)(x-2)}=\frac{x-5}{x-2} .$$

Γ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to1}\varphi(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-6x+5}{x^2-3x+2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-5)}{(x-2)}=4$$

$$\lim_{x\to5}\varphi(x)=\lim_{x\to5}\frac{x^2-6x+5}{x^2-3x+2}=0$$

Δ. Έστω $M(\omega,\varphi(\omega))$ το σημείο της C_φ, στο οποίο η εφαπτομένη σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία. Τότε θα είναι: $\varphi'(\omega)<0$.
Η $\varphi(x)$ είναι παραγωγίσιμη, ως ρητή πολυωνυμική με:

$$\varphi'(x)=\left(\frac{x-5}{x-2}\right)'=\frac{(x-5)'(x-2)-(x-5)(x-2)'}{(x-2)^2}=$$

$$\frac{x-2-x+5}{(x-2)^2}=\frac{3}{(x-2)^2}>0 \text{ για κάθε } x\in A_\varphi.$$

Επομένως, δεν υπάρχει τέτοιο σημείο.

Ε. Εφόσον $\varphi'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{1,2\}$, η φ είναι γνησίως αύξουσα και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

<u>Θέμα 3</u>

Α.i. Έστω x, y οι διαστάσεις του ορθογωνίου. Τότε είναι:

$E=169 \Leftrightarrow x\cdot y=169 \Leftrightarrow y=\frac{169}{x}$, $x>0$. Οπότε η περίμετρος είναι:

$\Pi(x)=2x+2\frac{169}{x}=2x+\frac{338}{x}$, $x>0$. Η Π είναι παραγωγίσιμη, με

$$\Pi'(x)=\left(2x+\frac{338}{x}\right)'=2-\frac{338}{x^2}=\frac{2x^2-338}{x^2},\ x>0.$$

Λύνουμε την εξίσωση: $\Pi'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-338}{x^2}=0 \Leftrightarrow 2x^2-338=0 \Leftrightarrow$

$2x^2=338 \Leftrightarrow x^2=169 \Leftrightarrow x=\sqrt{169} \Leftrightarrow x=13$.

Ο πίνακας προσήμων της Π' είναι:

x	0	13	$+\infty$
Π'	‖	$-$	$+$
Π	‖	$\searrow$	$\nearrow$

Η περίμετρος γίνεται ελάχιστη για x=13. Τότε οι διαστάσεις του Ορθογώνιου μέρους της μάσκας είναι x=13 και y=13.

ii. Ο ρυθμός μεταβολής της περιμέτρου της μάσκας είναι

$\Pi'(x)=2-\dfrac{338}{x^2}$. Για την παράγωγό του έχουμε:

$\Pi''(x)=\left(2-338x^{-2}\right)'=676x^{-3}=\dfrac{676}{x^3}>0$ για κάθε $x>0$.

Οπότε ο ρυθμός μεταβολής της περιμέτρου, διαρκώς αυξάνεται.

B. Έχουμε τη συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-3x+2}, & x\neq 2, x\neq 1\\ \lambda x^2-5x-\dfrac{4}{3}, & x=2\end{cases}$

i. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=\mathbb{R}-\{1\}$.

ii. Για να είναι η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ πρέπει: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$.

Είναι: $f(2) = 4\lambda - 10 - \frac{4}{3}$ και $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-3x+2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{(x-1)(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{x^2+5}\right)^2-9}{(x-1)(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)} =$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{(x-1)(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)} =$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x+2)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Οπότε πρέπει:

$$4\lambda - 10 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 12\lambda - 30 - 4 = 2 \Leftrightarrow 12\lambda = 36 \Leftrightarrow \lambda = 3.$$

<u>Θέμα 4ο</u>:

A. Για να ορίζεται η $f(x) = \sqrt{x^2-2x+10}$ πρέπει: $x^2 - 2x + 10 \geq 0$.

Είναι: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4 - 40 = -36 < 0$ και $\alpha = 1 > 0$, όποτε $x^2 - 2x + 10 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R}$.

B. Η f είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων με:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2-2x+10}\right)' = \frac{\left(x^2-2x+10\right)'}{2\sqrt{x^2-2x+10}} = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+10}} =$$

$$\frac{2(x-1)}{2\sqrt{x^2-2x+10}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}.$$

Γ. Λύνουμε την εξίσωση:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

Ο πίνακας προσήμων είναι:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f '	-		+
f	↘		↗

Η f είναι γν.φθίνουσα στο $(-\infty,1]$ και γν.αύξουσα στο $[1,+\infty)$, οπότε παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για x=1 το $f(1)=3$. Επομένως, $f(x)\geq 3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ. Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(5,f(5))$ είναι: $y=\alpha x+\beta$ με $\alpha=f'(5)=\frac{4}{5}$. Επίσης, η ευθεία διέρχεται από το $M(5,5)$ άρα θα την επαληθεύει, οπότε $5=\frac{4}{5}\cdot 5+\beta \Leftrightarrow 5=4+\beta \Leftrightarrow \beta=1$. Η ζητούμενη ευθεία είναι: $y=\frac{4}{5}x+1$.

Ε. Η ε τέμνει τον άξονα $x'x$ όταν $y=0 \Leftrightarrow \frac{4}{5}x+1=0 \Leftrightarrow 4x+5=0 \Leftrightarrow 4x=-5 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{4}$ και τον $y'y$, όταν $x=0$, δηλαδή y=1. Τα ζητούμενα σημεία είναι: $A\left(-\frac{5}{4},0\right)$ και $B(0,1)$.