208
Γ' Λυκείου
Ον/μο:………………………. Μαθ. Προσαν.
Ύλη:Μέχρι Ακρότατα 7-11-2020

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε μία συνάρτηση f λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0; **(μον.5)**

Α2. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα Fermat. **(μον.5)**

Α3. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **(μον.5)**

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Αν μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, είναι γνησίως αύξουσα στο Α τότε ισχύει ότι $f'(x)>0$.»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. **(μον.1)**

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α). **(μον.3)**

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f είναι τα σημεία για τα οποία ισχύει $f'(x)=0$.

β) Αν $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$.

γ) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα. **(μον.6)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\sqrt{x^2-2x+4}$

Β1. Να δείξετε ότι η f έχει πεδίο ορισμού το R και ότι είναι γνησίως αύξουσα. **(μον.7)**

Β2. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της f^{-1}. **(μον.7)**

Β3. Να δείξετε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα. **(μον.5)**

Β4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)\cdot f'(x)=1,\ x\in R$ έχει μοναδική λύση την x=0. **(μον.6)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **(μον.6)**

Γ2. Αν είναι γνωστό ότι το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\left(-\infty,\dfrac{1}{2e}\right]$. **(μον.4)**

Γ3. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in R$ ώστε η εξίσωση $f(x)=\lambda,\ x>0$ έχει ακριβώς μια λύση. **(μον.5)**

Γ4. Αν $\alpha\geq 2$ να δείξετε ότι:

α) $f(\alpha+1)<f(\alpha)$ **(μον.4)**

β) $\alpha^{(\alpha+1)^2}>(\alpha+1)^{\alpha^2}$ **(μον.6)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(0)=f'(0)=0$ και $f''(x)\geq 12x^2, \forall x\in R$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα. **(μον.3)**

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **(μον.3)**

Δ3. Να γράψετε την εξίσωση των εφαπτόμενων της C_f στα σημεία $A(1,f(1))$ και $B(-1,f(-1))$ και αν είναι γνωστό ότι και δύο βρίσκονται κάτω από την C_f στην περιοχή του $+\infty$, να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $[0,+\infty)$. **(μον.8)**

Δ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2f'(x)\cdot(f(x)-3)=(f(x)-2)\cdot(f(x)-4)$ έχει τουλάχιστον τρείς ρίζες στο [0,1]. **(μον.6)**

Δ5. Αν $f(1)=1$ να δείξετε ότι $f(x)=x^4,\ \forall x\in R$. **(μον.5)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχ. Βιβλίο **Α2.** Σχ. Βιβλίο **Α3.** Σχ. Βιβλίο

Α4. α) Ψ

β) Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3$. Αν και είναι γνησίως αύξουσα στο R, εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x)=3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το R, αφού $f'(0)=0$.

Ισχύει όμως $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in R$.

Α5. α) Λάθος **β)** Λάθος **γ)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το τριώνυμο x^2-2x+4 έχει διακρίνουσα $\Delta=-12<0$ άρα είναι θετικό για κάθε $x\in R$ οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το A=R.
Η f είναι παραγωγίσιμη στο Α με παράγωγο

$$f'(x)=1+\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+4}}=1+\frac{2\cdot(x-1)}{\sqrt{x^2-2x+4}}=1+\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+4}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-2x+4}+x-1}{\sqrt{x^2-2x+4}}=\frac{\sqrt{(x-1)^2+3}+x-1}{\sqrt{x^2-2x+4}}>\frac{\sqrt{(x-1)^2}+x-1}{\sqrt{x^2-2x+4}}=$$

$$=\frac{|x-1|+x-1}{\sqrt{x^2-2x+4}}\geq 0,\text{γιατί } |x-1|\geq x-1 \text{ με το = να ισχύει για x=1.}$$

Αρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

B2.Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα είναι και 1-1 άρα αντιστρέφεται. Θα βρώ το σύνολο τιμών της που είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης καθώς και τον τύπο της αντίστροφης απ' την λύση της εξίσωσης $f(x)=y$.

Εχω: $f(x)=y \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2-2x+4}=y \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+4}=x-y \Leftrightarrow$

$\overset{y\geq x}{\Leftrightarrow} x^2-2x+4=y^2-2xy+x^2 \Leftrightarrow 2yx-2x=y^2-4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 2(y-1)x=y^2-4 \overset{y\neq 1}{\Leftrightarrow}\ x=\dfrac{y^2-4}{2(y-1)}$.

Αφού $y\geq x$, πρέπει

$$\frac{y^2-4}{2(y-1)}\leq y \Leftrightarrow \frac{y^2-4}{2(y-1)}-y\leq 0 \Leftrightarrow \frac{y^2-4-2y^2+2y}{2(y-1)}\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2-2y+4}{2(y-1)}\geq 0 \Leftrightarrow y\geq 1.$$

Το σύνολο τιμών της f επομένως και το πεδίο ορισμού της f^{-1}

είναι $A_{f^{-1}}=(1,+\infty)$ και $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2-4}{2(x-1)}$.

B3.Για κάθε $x\in R$ είναι :

$$f''(x)=\left(1+\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+4}}\right)'=\frac{(x-1)'\cdot\sqrt{x^2-2x+4}-(x-1)\cdot\dfrac{2x-2}{2\cdot\sqrt{x^2-2x+4}}}{\left(\sqrt{x^2-2x+4}\right)^2}$$

$$=\frac{x^2-2x+4-x^2+2x-1}{(x^2-2x+4)^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{(x^2-2x+4)^{\frac{3}{2}}}>0.$$

Αρα η f' είναι γνησίως αύξουσα.

B4.Εχουμε ότι $f(0)\cdot f'(0)=2\cdot\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=1$ άρα το μηδέν είναι ρίζα της εξίσωσης. Επιπλέον είναι: $(f'(x)\cdot f(x))'=f'(x)\cdot f'(x)+f(x)\cdot f''(x)=$

$=(f'(x))^2+f(x)\cdot f''(x)\ \underset{B2,B3}{\overset{B1}{>}}\ 0$,οπότε η συνάρτηση $f'(x)\cdot f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα. η ρίζα x=0 λοιπόν είναι μοναδική.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=(0,+\infty)$ και παράγωγο

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)'=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-\ln x\cdot 2x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}.$$

Αν $f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow \frac{1-2\ln x}{x^3}\ge 0 \Leftrightarrow 1-2\ln x\ge 0 \Leftrightarrow \ln x\le \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$x\le e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x\le\sqrt{e}$

Στον πίνακα φαίνονται τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f.

x	0	A_1	$\sqrt{e}$	A_2	$+\infty$
f '		+		−	
f	$-\infty$	↑		↑	0

min=$\frac{1}{2e}$

Γ2. Είναι:

$$\lim_{x\Rightarrow 0^+} f(x)=\lim_{x\Rightarrow 0^+}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\Rightarrow 0^+}\left(\ln x\cdot\frac{1}{x^2}\right)=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty.$$

Η f είναι συνεχής με μέγιστη τιμή την $\frac{1}{2e}$ άρα έχει σύνολο τιμών

το A=$f(A)=\left(-\infty,\frac{1}{2e}\right]$.(Σκεφτείτε ένα ενδεικτικό σχήμα)

Γ3. Απ' τον πίνακα του Γ1 και το Γ2 προκύπτει ότι $\lambda=\frac{1}{2e}$, $\lambda\le 0$..

Γ4. α) Εχουμε $\alpha\ge 2>\sqrt{e}$ οπότε $\alpha+1>\alpha \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(\alpha+1)<f(\alpha)$.

β) Αφού $f(\alpha+1)<f(\alpha)\Leftrightarrow \frac{\ln(\alpha+1)}{(\alpha+1)^2}<\frac{\ln\alpha}{\alpha^2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^2\cdot\ln(\alpha+1)<(\alpha+1)^2\cdot\ln\alpha \Leftrightarrow \ln(\alpha+1)^{\alpha^2}<\ln\alpha^{(\alpha+1)^2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha+1)^2<\alpha^{(\alpha+1)^2}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.Εχουμε ότι $f''(x) \geq 12x^2 \geq 0 \quad \forall x \in R$ με το = να ισχύει για x=0.

Αρα η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Δ2.●Αν $x < 0 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(0) = 0$

●Αν $x > 0 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(0) = 0$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον πίνακα.

x	$-\infty$ A_1	0 A_2 $+\infty$
f '	$- \uparrow$	$+ \uparrow$
f ''	+	+
f	$+\infty$ $\cup$	$\cup$ $-\infty$

min=0

Δ3.Οι εφαπτόμενες της C_f στα Α και Β έχουν αντίστοιχα εξισώσεις

$\varepsilon_A : y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1)$ και $\varepsilon_B : y - f(-1) = f'(-1)\cdot(x+1)$,αλλιώς

$\varepsilon_A : y = f'(1)\cdot x + f(1) - f'(1)$ και $\varepsilon_B : y = f'(-1)\cdot x + f(-1) + f'(-1)$.

Αφού και οι δύο βρίσκονται κάτω απ' την C_f στην περιοχή του $+\infty$ θα ισχύει ότι $f(x) > \varepsilon_A$ και $f(x) > \varepsilon_B$.

Όμως :

$$\lim_{x\to+\infty} \varepsilon_A = \lim_{x\to+\infty} [f'(1)x + f(1) - f'(1)] = +\infty \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \varepsilon_B = \lim_{x\to-\infty} [f'(-1)x + f(-1) - f'(-1)] = +\infty$$

αφού $f'(1) > 0$ και $f'(-1) < 0$ (Βλέπε πίνακα στο Δ2)

Αρα $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Η f λοιπόν έχει σύνολο τιμών το

$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [0,+\infty) \cup [0,+\infty) = [0,+\infty)$.

Δ4. Θεωρώ την $h(x)=2f'(x)\cdot(f(x)-3)-(f(x)-2)\cdot(f(x)-4)$.

Σύμφωνα με τις μεταβολές της f (πίνακας στο Δ2) υπάρχουν (σκεφτείτε για καλύτερη κατανόηση ενδεικτικό σχήμα)

$x_3<x_2<x_1<0$ με $f(x_3)=4,\ f(x_2)=3,\ f(x_1)=2$ και

$x'_1<x'_2<x'_3<0$ με $f(x'_1)=2,\ f(x'_2)=3,\ f(x'_3)=4$.

Είναι τώρα:

$h(x_3)=2f'(x_3)\cdot(4-3)-(4-2)\cdot(4-4)=2f'(x_3)<0$

$h(x_2)=2f'(x_2)\cdot(3-3)-(3-2)\cdot(3-4)=1>0$

$h(x_1)=2f'(x_1)\cdot(2-3)-(2-2)\cdot(2-4)=-2f'(x_1)>0$

$h(x'_1)=2f'(x'_1)\cdot(2-3)-(2-2)\cdot(2-4)=-2f'(x'_1)<0$

$h(x'_2)=2f'(x'_2)\cdot(3-3)-(3-2)\cdot(3-4)=1>0$.

Σύμφωνα τώρα με το θεώρημα Bolzano θα υπάρχουν $\xi_1\in(x_3,x_2),\ \xi_2\in(x_1,x'_1),\ \xi_3\in(x'_1,x'_2)$ ώστε $h(\xi_1)=0,\ h(\xi_2)=0,\ h(\xi_3)=0$.

Δ5. Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^4$ είναι η σταθερή μηδενική στο [0,1].

Απ' το Θ.Μ.Τ. ,για την g', προκύπτει ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε

$$\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}=g''(\xi)\geq 0\Rightarrow g'(x)-g'(0)\geq 0\Leftrightarrow g'(x)\geq g'(0)=f'(0)\overset{(\upsilon\pi)}{=}0.$$

Σύμφωνα επίσης με το Θ.Μ.Τ. για την g στα [0,x], [x,1] θα υπάρχουν

- $\kappa\in(0,x)$ με $g'(\kappa)=\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\dfrac{g(x)}{x}\geq 0\Rightarrow g(x)\geq 0$ **(1)**

- $\lambda\in(x,1)$ με $g'(\lambda)=\dfrac{g(1)-g(x)}{1-x}=\dfrac{-g(x)}{1-x}\geq 0\Rightarrow g(x)\leq 0$ **(2)**

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $g(x)=0\Leftrightarrow f(x)-x^4=0\Leftrightarrow f(x)=x^4$.