ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **10**

Β' Λυκείου

Ον/μο:………………………. **ΕΠΑ.Λ.**

Ύλη: Συστήματα –Ιδιότητες Συναρτήσεων **07-11-20**

<u>Θέμα 1ο:</u>

A.i. Τι ονομάζουμε γραμμική εξίσωση; **(6 μον.)**

ii. Πότε μία συνάρτηση f ονομάζεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; **(5 μον.)**

iii. Τι ονομάζουμε λύση ενός γραμμικού συστήματος 2x2; **(4 μον.)**

B. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** **Σωστό** ή **(Λ)** **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Η εξίσωση $5x^2+3y=9$ είναι γραμμική. **Σ Λ**

ii. Αν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους έχει μοναδική λύση τότε $D\neq 0$. **Σ Λ**

iii. Το σύστημα $\left.\begin{array}{l} 7x-3y=9 \\ -5x+4y=11 \end{array}\right\}$ είναι προτιμότερο να το λύσουμε με τη μέθοδο της αντικατάστασης. **Σ Λ**

iv. Η συνάρτηση $f(x)=5x+9$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. **Σ Λ**

v. Η συνάρτηση $f(x)=-2x^2+3x-7$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. **Σ Λ**

(5x2=10 μον.)

<u>Θέμα 2ο:</u> Δίνεται το σύστημα: $\left.\begin{array}{l} x-3y=5 \\ 2x+5y=-1 \end{array}\right\}$.

A. Να λύσετε γραφικά το σύστημα. **(7 μον.)**

B. Να λύσετε το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης. **(5 μον.)**

Γ. Να λύσετε το σύστημα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών. **(6 μον.)**

Δ. Να λύσετε το σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών. **(7 μον.)**

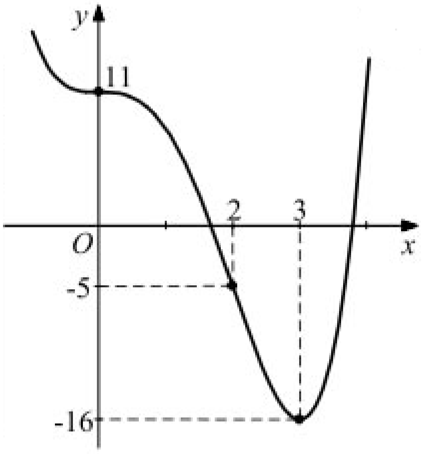
<u>Θέμα 3ο:</u>

Α. Να μελετήσετε την $f(x)=\dfrac{-x^3+5}{7}$ ως προς τη μονοτονία. **(5 μον.)**

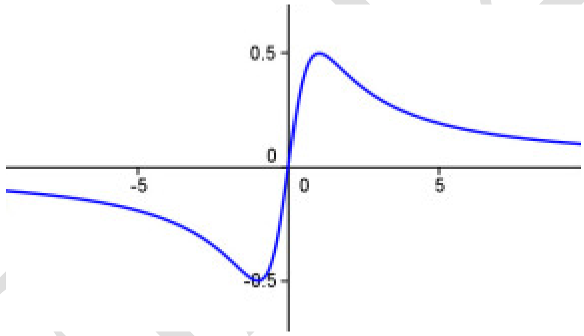
Β . Να μελετήσετε τη συνάρτηση $g(x)=x^2-5x+6$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **(4 μον.)**

Γ. Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα, να μελετήσετε τις συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα.

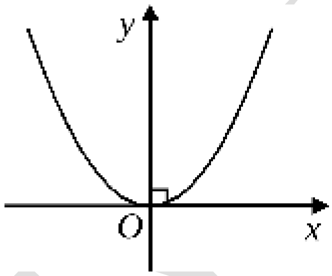
i.



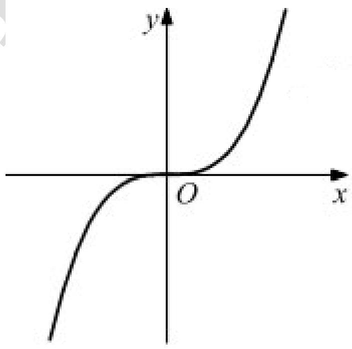
ii.



iii.



iv.



(4x4=16 μον.)

Θέμα 4ο:

Α. Να λύσετε το σύστημα: $\left.\begin{aligned}(\lambda-1)x+8y=4\\ x+(\lambda+1)y=2\end{aligned}\right\}$ για τις διάφορες τιμές του λ. **(12 μον.)**

Β. Να λύσετε το σύστημα: $\left.\begin{aligned}x+y=8\\ x\cdot y=12\end{aligned}\right\}$ και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα. **(13 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1ο:

Α. i. Γραμμική εξίσωση ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$ με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$.

ii. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, ισχύει ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

iii. Λύση ενός γραμμικού συστήματος 2x2, ονομάζουμε κάθε ζεύγος (x, y) που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος.

Β. i.Λ **ii.**Σ **iii.** Λ **iv.**Σ **v.**Λ

Θέμα 2ο:

Έχουμε το σύστημα $\left.\begin{matrix} x - 3y = 5 \\ 2x + 5y = -1 \end{matrix}\right\}(\Sigma)$

Α. Θεωρούμε τις ευθείες $\varepsilon_1 : x - 3y = 5$ και $\varepsilon_2 : 2x + 5y = -1$. Θα κατασκευάσουμε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τις δύο ευθείες. Έχουμε τους εξής πίνακες τιμών των δύο ευθειών:

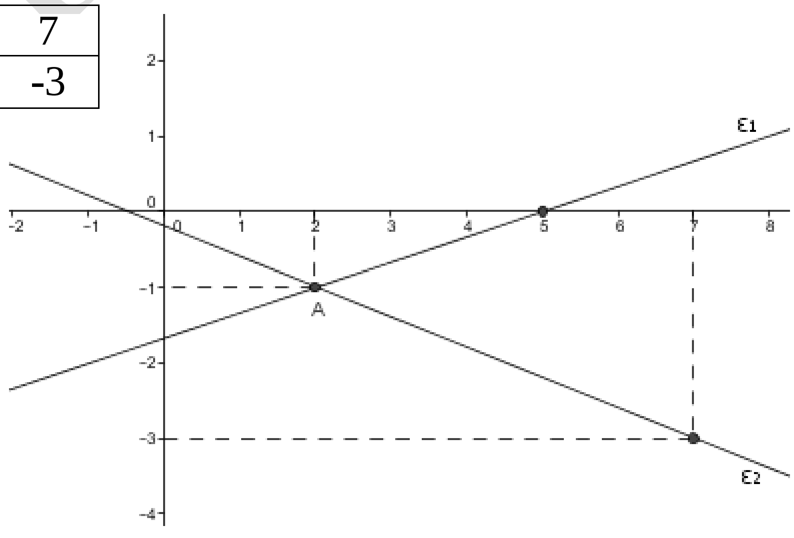
ε_1:

x	2	5
y	-1	0

ε_2:

x	2	7
y	-1	-3

Άρα έχουμε:



Δηλαδή (x,y)=(2,-1).

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Β. $\left.\begin{array}{l} x-3y=5 \\ 2x+5y=-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=5+3y \\ 2(5+3y)+5y=-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=5+3y \\ 10+6y+5y=-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$\left.\begin{array}{l} x=5+3y \\ 6y+5y=-1-10 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=5+3y \\ 11y=-11 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=5+3\cdot(-1) \\ y=-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} x=2 \\ y=-1 \end{array}\right)$

Δηλαδή (x,y)=(2,-1).

Γ. $\left.\begin{array}{l} x-3y=5 \\ 2x+5y=-1 \end{array}\right\} \overset{\cdot(-2)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{l} -2x+6y=-10 \\ 2x+5y=-1 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{l} 11y=-11 \\ x-3y=5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=-1 \\ x+3=5 \end{array}\right\}$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} y=-1 \\ x=2 \end{array}\right)$

Δηλαδή (x,y)=(2,-1).

Δ. Βρίσκουμε την ορίζουσα των συντελεστών του $\left.\begin{array}{l} x-3y=5 \\ 2x+5y=-1 \end{array}\right\}(\Sigma)$.

Είναι: $D=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=5+6=11\neq 0$, άρα το (Σ) έχει μοναδική λύση.

Θα βρούμε και τις άλλες ορίζουσες του (Σ). Έχουμε:

$D_x=\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=25-3=22$ και $D_y=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-1-10=-11$

Τότε η λύση του (Σ) είναι: $(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{22}{11},\frac{-11}{11}\right)=(2,-1)$.

<u>Θέμα 3ο:</u>

Α. Έχουμε τη συνάρτηση: $f(x)=\frac{-x^3+5}{7}$, $A=\mathbb{R}$.

Έστω $x_1,\ x_2\in A$ με $x_1<x_2$.

Τότε: $x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3 \overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow} -x_1^3>-x_2^3 \overset{(+5)}{\Leftrightarrow} -x_1^3+5> \overset{:7}{\Leftrightarrow}$

$\frac{-x_1^3+5}{7}>\frac{-x_2^3+5}{7} \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Β. Η $g(x)=x^2-5x+6$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$ και είναι παραβολή με α=1>0, οπότε στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω.

Η κορυφή της είναι: $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$, όπου Δ=1, άρα $K\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{4}\right)$.

Επομένως, η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=\frac{5}{2}$ το $y=-\frac{1}{4}$.

Γ.i. Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3,+\infty)$. Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το -16 για x=3.

ii. Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$, γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$. Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το -0,5 για x=-1 και ολικό μέγιστο το 0,5 για x=1.

iii. Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το 0 για x=0.

iv. Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$. Δεν παρουσιάζει ακρότατα.

<u>Θέμα 4^{o}:</u>

Α. Έχουμε το σύστημα : $\left.\begin{aligned}(\lambda-1)x+8y=4\\ x+(\lambda+1)y=2\end{aligned}\right\}(\Sigma)$

Βρίσκουμε τις ορίζουσες του (Σ).

$$D=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 8\\ 1 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)-8=\lambda^2-1-8=\lambda^2-9=(\lambda-3)(\lambda+3)$$

$$D_x=\begin{vmatrix}4 & 8\\ 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=4(\lambda+1)-16=4\lambda+4-16=4\lambda-12=4(\lambda-3)$$

$$D_y=\begin{vmatrix}\lambda\text{-}1 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2(\lambda-1)-4=2\lambda-2-4=2\lambda-6=2(\lambda-3)$$

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

* Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda-3)(\lambda+3) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \pm 3$ το (Σ) έχει μοναδική λύση την

$$(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{4(\lambda-3)}{(\lambda-3)(\lambda+3)},\frac{2(\lambda-3)}{(\lambda-3)(\lambda+3)}\right)=\left(\frac{4}{(\lambda+3)},\frac{2}{(\lambda+3)}\right)$$

* Αν $D=0 \Leftrightarrow \lambda=\pm 3$ τότε:

→Αν λ=3 το (Σ) γίνεται: $\left.\begin{matrix} 2x+8y=4 \\ x+4y=2 \end{matrix}\right\} \overset{:2}{\Leftrightarrow} \left.\begin{matrix} x+4y=2 \\ x+4y=2 \end{matrix}\right\}$. Οπότε το (Σ) έχει άπειρες λύσεις της μορφής (x,y)=(2-4y,y) με $y \in \mathbb{R}$.

→ Αν λ=-3 το (Σ) γίνεται: $\left.\begin{matrix} -4x+8y=4 \\ x-2y=2 \end{matrix}\right\} \overset{:(-4)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{matrix} x-2y=-1 \\ x-2y=2 \end{matrix}\right\}$. Οπότε το (Σ) είναι αδύνατο.

Β. Έχουμε : $\left.\begin{matrix} x+y=8 \\ x\cdot y=12 \end{matrix}\right\}$

Αναζητούμε δύο αριθμούς που έχουν άθροισμα 8 και γινόμενο 12. Επομένως , από τους τύπους του Vieta οι αριθμοί αυτοί είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\omega^2-8\omega+12=0$. Οι ρίζες της εξίσωσης είναι ω=2 ή ω=6 . Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη (2,6) ή (6,2) .

Γεωμετρικά , έχουμε ότι η ευθεία και η υπερβολή τέμνονται σε 2 σημεία .

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ