ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

22

Ον/μο:……………….. **Γ’ Λυκείου(ΕΠΑ.Λ)**
Ύλη: Διαφορικός Λογισμός **03-10-20**

Θέμα 1ο:

Α. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ’ ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; **(5 μον.)**

Β. Πότε μια συνάρτηση λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ’ ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; **(5 μον.)**

Γ. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)+g(x)$ είναι ίση με $\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)$. **(5 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Αν δύο συναρτήσεις f και g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο Α, τότε ορίζεται το πηλίκο τους ως: $R(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)},\ x\in A$. **Σ Λ**

ii. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ είναι το $\mathbb{R}-\{\pm1\}$. **Σ Λ**

iii. $\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g'(x)$. **Σ Λ**

iv. Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2x & ,x=3\\ \dfrac{x^2-9}{x-3} & ,x\neq 3\end{cases}$ είναι συνεχής στο $x_0=3$. **Σ Λ**

(4x1=4 μον.)

Ε. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

i. $\left(f\left(g(x)\right)\right)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

ii. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_2$ τότε

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .$$

iii. $\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x - 6\right)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

(3x2=6 μον.)

<u>Θέμα 2^o</u>:

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = x^2 - 6x + 5$ και $g(x) = x^2 - 1$.

Α. Να προσδιορίσετε τα σημεία στα οποία οι C_f και C_g τέμνουν τον άξονα $x'x$. **(6 μον.)**

Β. Να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των C_f και C_g. **(5 μον.)**

Γ. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα κατά τα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g . **(5 μον.)**

Δ. Να ορίσετε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. **(4 μον.)**

Ε. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)$. **(5 μον.)**

Θέμα 3ο:

Α. Έστω $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{N}$ πλευρές τριγώνου με $A=90^\circ$. Αν τα για τα β και γ ισχύουν:

- $\beta=\left|\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-10x+21}{3-x}\right|$
- $\gamma+1=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$

i. Να αποδείξετε ότι α=5, β=4 και γ=3. **(7 μον.)**

ii. Αν $f(x)=\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}\cdot\left(x-\alpha^{-1}\right)\cdot\left(x+\beta^{-2}\right)\cdot(x-\gamma)$, να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες. **(6 μον.)**

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-8}{x-2}, & x\neq2\\ \alpha+3, & x=2\end{cases}$

Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f, να είναι συνεχής στο $x_0=2$. **(12 μον.)**

Θέμα 4ο:

Α. Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο $x(t)=t^3-6t^2+9t$, όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα και το x σε μέτρα.

i. Να βρεθεί η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο t. **(3 μον.)**

ii. Ποια είναι η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο 2s και ποια σε χρόνο 4s; **(2 μον.)**

iii. Πότε το σημείο είναι στιγμιαία ακίνητο; **(4 μον.)**

iv. Πότε το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική κατεύθυνση; **(4 μον.)**

v. Να βρεθεί το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το σημείο στη διάρκεια των πρώτων 5s. **(4 μον.)**

Β. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i. $f(x)=\sqrt[3]{x^5}\ ,x>0$.

ii. $g(x)=\eta\mu^3 x,\ x\in\mathbb{R}$.

iii. $h(x)=\eta\mu x^3,\ x\in\mathbb{R}$.

iv. $k(x)=\left(2x^2-3x\right)^5,\ x\in\mathbb{R}$.

(4x2=8 μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (ενδεικτικές)

Θέμα 1ο:

Α. Σχ. Βιβλίο

Β. Σχ. Βιβλίο

Γ. Σχ. Βιβλίο

Δ. i. Λ **ii.** Λ **iii.** Λ **iii.** Σ

Ε. i. $\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$.

ii. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_2$ τότε

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{l_1}{l_2},\ l_2 \neq 0 \ .$$

iii. $\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x - 6\right)' = x^2 - x + 5.$

Θέμα 2ο:

Α. Η $f(x) = x^2 - 6x + 5$ έχει πεδίο ορισμού το $A_f = \mathbb{R}$. Για να τέμνει τον άξονα $x'x$ πρέπει $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 5$.
Άρα τα σημεία είναι Α(1,0) και Β(5,0). Για να τέμνει τον άξονα $y'y$ πρέπει x=0 δηλαδή $f(0) = 5$. Οπότε το σημείο είναι Γ(0,5).
Η $g(x) = x^2 - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A_g = \mathbb{R}$. Για να τέμνει τον άξονα $x'x$ πρέπει $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$.
Άρα τα σημεία είναι Δ(1,0) και Ε(-1,0). Για να τέμνει τον άξονα $y'y$ πρέπει x=0 δηλαδή $g(0) = -1$. Οπότε το σημείο είναι Ζ(0,-1).

Β. Για τα κοινά σημεία των f και g έχουμε:
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = x^2 - 1 \Leftrightarrow -6x = -6 \Leftrightarrow x = 1$.
Οπότε το κοινό τους σημείο είναι το (1,0).

Γ. Για να βρίσκεται η C_f πάνω από τη C_g πρέπει:
$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 > x^2 - 1 \Leftrightarrow -6x > -6 \Leftrightarrow x < 1.$

Δ. Το πεδίο ορισμού των f και g είναι το $\mathbb{R}$, οπότε για να ορίζεται η $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ αρκεί να ισχύει $g(x) \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$.

Η φ έχει πεδίο ορισμού το $A_{\varphi}=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$ και τύπο:

$$\varphi(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2-6x+5}{x^2-1}\quad.$$

Ε. $$\lim_{x\to 1}\varphi(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-6x+5}{x^2-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x-5)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-5)}{(x+1)}=-\frac{4}{2}=-2\ .$$

Θέμα 3^{o}:

Α. i. Για την πλευρά β έχουμε:

$$\beta=\left|\lim_{x\to 3}\frac{x^2-10x+21}{3-x}\right|\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\left|\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-7)}{3-x}\right|=\left|\lim_{x\to 3}\left[-(x-7)\right]\right|=4\ .$$

Για την πλευρά γ έχουμε:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x-2}=$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{x+2}+2\right)=4$$

Οπότε $\gamma+1=4\Leftrightarrow\gamma=3$. Από Π.Θ. στο ορθ. τρίγωνο ΑΒΓ είναι:

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2\Leftrightarrow\alpha^2=4^2+3^2\Leftrightarrow\alpha^2=25\Leftrightarrow\alpha=5\ .$$

ii. Για α=5, β=4 και γ=3 έχουμε:

$$f(x)=\frac{\alpha\beta}{\gamma}\cdot\left(x-\alpha^{-1}\right)\cdot\left(x+\beta^{-2}\right)\cdot(x-\gamma)$$

$$f(x)=\frac{20}{3}\left(x-\frac{1}{5}\right)\left(x+\frac{1}{16}\right)(x-3)$$

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Για να τέμνει τον άξονα $y'y$ είναι $f(0)=\frac{20}{3}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{1}{16}\cdot(-3)=\frac{1}{4}$. Οπότε το σημείο είναι το $\left(0,\frac{1}{4}\right)$. Για να τέμνει τον άξονα $x'x$ πρέπει:

$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{20}{3}\left(x-\frac{1}{5}\right)\left(x+\frac{1}{16}\right)(x-3)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{5}$ ή $x=-\frac{1}{16}$ ή $x=3$.

Δηλαδή τα σημεία είναι: $\left(\frac{1}{5},0\right)$, $\left(-\frac{1}{16},0\right)$ και $(3,0)$.

B. Έχουμε τη συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+2x-8}{x-2}, & x\neq 2\\ \alpha+3, & x=2\end{cases}$.

Είναι: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x-2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+4)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+4)=6$ και $f(2)=\alpha+3$. Για να είναι η f συνεχής στο $x_0=2$ πρέπει:

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)\Leftrightarrow\alpha+3=6\Leftrightarrow\alpha=3$.

<u>Θέμα 4^{o}</u>:

A.i. Η ταχύτητα είναι: $u(t)=x'(t)=\left(t^3-6t^2+9t\right)'=3t^2-12t+9$.

ii. Η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο $t=2s$ είναι:

$u(2)=3\cdot 2^2-12\cdot 2+9=-3m/s$

Η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο $t=4s$ είναι:

$u(4)=3\cdot 4^2-12\cdot 4+9=9m/s$

iii. Το σημείο είναι ακίνητο όταν:

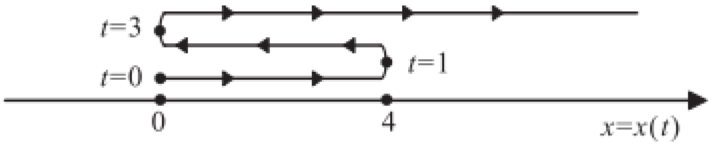
$u(t)=0\Leftrightarrow 3t^2-12t+9=0\Leftrightarrow t^2-4t+3=0\Leftrightarrow t=1s$ ή $t=3s$.

iv. Το σημείο κινείται κατά τη θετική κατεύθυνση όταν:

$u(t)>0\Leftrightarrow 3t^2-12t+9>0\Leftrightarrow t^2-4t+3>0\Leftrightarrow t<1s$ ή $t>3s$

Το σημείο κινείται κατά την αρνητική κατεύθυνση όταν:
$u(t) < 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 12t + 9 < 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < t < 3.$

v. Σχηματικά η κίνηση του υλικού σημείου μπορεί να παρασταθεί ως εξής:



Η απόσταση που διανύθηκε από το κινούμενο σημείο είναι;

■ Στη διάρκεια του 1ου δευτερολέπτου:
$S_1 = |x(1) - x(0)| = |4 - 0| = 4m$

■ Από t=1 μέχρι t=3:
$S_2 = |x(3) - x(1)| = |0 - 4| = 4m$

■ Από t=3 μέχρι t=5:
$S_3 = |x(5) - x(3)| = |20 - 0| = 20m$

Άρα το ολικό διάστημα S που διάνυσε το σημείο σε χρόνο 5s είναι: $S = S_1 + S_2 + S_3 = 4 + 4 + 20 = 28m$.

B.i. $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$ $, x > 0$

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^5}\right)' = \left(x^{\frac{5}{3}}\right)' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$$

ii. $g(x) = ημ^3 x,\ x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = \left(ημ^3 x\right)' = 3ημ^2 x \cdot (ημx)' = 3ημ^2 xσυνx$$

iii. $h(x) = ημx^3,\ x \in \mathbb{R}$

$$h'(x) = \left(ημx^3\right)' = συνx^3 \cdot \left(x^3\right)' = 3x^2 συνx^3$$

iv. $k(x) = \left(2x^2 - 3x\right)^5,\ x \in \mathbb{R}$

$$k'(x) = \left[\left(2x^2 - 3x\right)^5\right]' = 5\left(2x^2 - 3x\right)^4 \cdot \left(2x^2 - 3x\right)' =$$

$$5\left(2x^2 - 3x\right)^4 \cdot (4x - 3)$$