ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 207

Γ' Λυκείου

Ον/μο:………………………… **Μαθ. Προσαν.**

Ύλη:Μέχρι Ρυθμό μεταβολής **3-09-2020**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής. **(μον.6)**

Α2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$,

είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. **(μον.6)**

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν μία συνάρτηση f είναι 1-1, τότε είναι γνησίως μονότονη.»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. **(μον.1)**

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α). **(μον.3)**

Α4. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$,

α) η εξίσωση f(x)=0 δεν έχει λύση στο (α,β).

β) η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς μία λύση στο (α,β).

γ) η εξίσωση f(x)=0 έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο (α,β).

δ) δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης f(x)=0 στο (α,β). **(μον.3)**

www.efklidis.edu.gr Τρίκαλα τηλ.-fax(24310-36733)

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με Σ ή Λ:

α) Για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f ,ο ρυθμός μεταβολής του x ως προς y είναι η παράγωγος $f'(x)$. Σ Λ

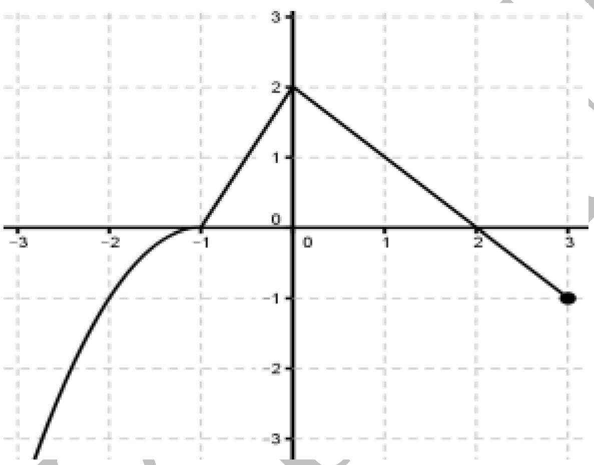
β) Έστω δύο συναρτήσεις f και g με πεδίο ορισμού A και B αντίστοιχα. Για να ορίζεται η σύνθεση της f με την g πρέπει $f(A)\cap B\neq\varnothing$. Σ Λ

γ) Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Τότε είναι $f\left(f^{-1}(y)\right)=y,\ y\in A$. Σ Λ

(μον.6)

<u>ΘΕΜΑ Β:</u>

Β1. Δίνεται η συνάρτηση του σχήματος:



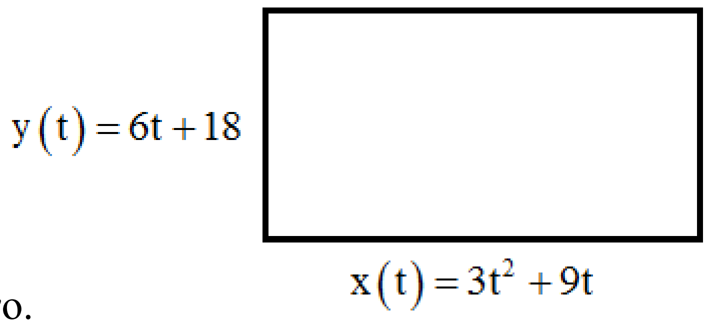
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f. **(μον.4)**

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $\sqrt{f}$, $\frac{1}{f}$, $|f|$ και να τις μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τους. **(μον.6)**

γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f\circ f$. **(μον.4)**

δ) Να λύσετε την ανίσωση: $f(-x)\leq 1$ στο διάστημα $[0,+\infty)$. **(μον.3)**

Β2. Δίνεται ορθογώνιο με διαστάσεις $x(t)=3t^2+9t$ και $y(t)=6t+18$, όπου t ο χρόνος σε sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου, τη χρονική στιγμή που γίνεται τετράγωνο.



(μον.8)

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x)=\alpha x^3+x,\ \alpha\in R\text{-}\{0\}$.

Γ1.Να υπολογίσετε την τιμή του α, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(1,f(1))$ να διέρχεται από το σημείο $B\left(\frac{1}{2},0\right)$. **(μον.6)**

Στη συνέχεια για α=1

Γ2.Να λύσετε την ανίσωση $f(x^3+x)>10$. **(μον.6)**

Γ3.Να λύσετε την εξίσωση $f\left(\frac{1}{x}\right)+x^2+x^6=0$. **(μον.6)**

Γ4.Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x^2-x+1}\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)$. **(μον.7)**

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(f\left(1+\frac{2}{x}\right)-f\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=1$.

Δ1.Να δείξετε ότι $f'(1)=1$. **(μον.6)**

Δ2. Θεωρούμε επιπλέον, τη συνάρτηση g που ορίζεται από την ισότητα $g(x)=f(e^x)-1,\ x\in R$.
Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $A(1,f(1))$ εφάπτεται της C_g στο $B(0,g(0))$. **(μον.4)**

Στη συνέχεια, αν είναι γνωστό ότι $g(x)=x^2+x$

Δ3. Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=\ln^2 x+\ln x+1$,x>0
και να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{xf'(x)}$. **(μον.5)**

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $f'(e^x)=e^{-2x}$. **(μον.4)**

Δ5.Αν 1<α<2 να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\alpha,\ 1<\alpha<2$,έχει μία τουλάχιστον ρίζα. **(μον.6)**

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ</u>

Απαντήσεις (ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχ. Βιβλίο **Α2.** Σχ. Βιβλίο

Α3. α) Ψ

β) Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x, & x \le 0 \\ \frac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$ είναι 1-1 αλλά όχι γνησίως μονότονη.

Α4. δ

Α5. α) Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. α) Για το πεδίο ορισμού της f από την προβολή της C_f στον άξονα $x'x$ έχουμε ότι $A=(-\infty,3]$. Για το σύνολο τιμών, από την προβολή της C_f στον άξονα $y'y$ είναι $f(A)=(-\infty,2]$.

β)∗ Για να ορίζεται η $\sqrt{f}$ πρέπει: $f(x)\ge 0$. Από τη C_f η ανίσωση έχει λύσεις: $x\in[-1,2]$. Άρα το $[-1,2]$ είναι το πεδίο ορισμού της $\sqrt{f}$. Η μονοτονία της , θα είναι η ίδια με τη μονοτονία της f (η $\sqrt{x}$ είναι γν.αύξουσα).Οπότε θα είναι: γνησίως αύξουσα στο $[-1,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$.

∗ Για να ορίζεται η $\frac{1}{f}$ πρέπει: $f(x)\ne 0$. Από τη C_f η $f(x)=0$ έχει λύσεις $x=-1$ ή $x=2$. Άρα το $A_f-\{-1,2\}$ είναι το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f}$.

Η μονοτονία της , θα είναι η «αντίθετη» με τη μονοτονία της f (η $\frac{1}{x}$ είναι γν.φθίνουσα). Οπότε θα είναι: γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1)$ και στο $(-1,0]$ ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,2)$ και στο $(2,3]$.

- Η $|f|$ ορίζεται όταν ορίζεται και η f, δηλαδή στο $A=(-\infty,3]$.

  Η γραφική της παράσταση αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτό. Οπότε είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$ και στο $[0,2]$, ενώ είναι γν. αύξουσα στο $[-1,0]$ και στο $[2,3]$.

γ) Για να ορίζεται η $f\circ f$ πρέπει να υπάρχουν x ώστε:

$$\left.\begin{matrix} x\in A \\ f(x)\in A\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x\le 3 \\ f(x)\le 3\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x\le 3 \\ x\in A\end{matrix}\right\} \Rightarrow x\le 3$$

Άρα το πεδίο ορισμού της $f\circ f$ είναι το $(-\infty,3]$.

δ) Είναι: $f(-x)\le 1 \Leftrightarrow f(-x)\le f(1) \Leftrightarrow f(-x)\le f\left(-\frac{1}{2}\right) \underset{\sigma\tau o(-\infty,0)}{\overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow}}$. Όμως,

$-x\le -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x\ge \frac{1}{2}$. Αφού $x\ge 0 \Leftrightarrow x\ge \frac{1}{2}$.

Β2.

$E=x\cdot y$, άρα $E(t)=x(t)\cdot y(t)=(3t^2+9t)(6t+18)=$

$18t^3+54t^2+54t^2+162t=18t^3+108t^2+162t$.

Τη χρονική στιγμή που το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο θα ισχύει $x(t)=y(t) \Leftrightarrow 3t^2+9t=6t+18 \Leftrightarrow 3t^2+3t-18=0 \Leftrightarrow$

$t^2+t-6=0 \Leftrightarrow t=2s$ ή $t=-3s$ απορ.

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι

$E'(t)=(18t^3+108t^2+162t)'=54t^2+216t+162$, οπότε τη χρονική στιγμή που το ορθογώνιο θα γίνει τετράγωνο ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι: $E'(2)=810$ τ.μον./sec.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.Είναι:

$$f'(x)=3\alpha x^2+1 \text{ και } \varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y-(\alpha+1)=(3\alpha+1)(x-1)$$

Το $B\left(\frac{1}{2},0\right)\in\varepsilon$ οπότε $-(\alpha+1)=(3\alpha+1)\left(\frac{1}{2}-1\right)\Rightarrow\alpha=1$.

Γ2. Για α=1 είναι $f'(x)==3x^2+1>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R**.**

Η $f(x^3+x)>10\Leftrightarrow f(x^3+x)>f(2)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x^3+x>2\Leftrightarrow x^3+x-2>0\Leftrightarrow$

$\overset{\text{Horner}}{\Longleftrightarrow}(x-1)(x^2+x+2)>0\overset{x^2+x+1>0}{\Longleftrightarrow}x-1>0\Leftrightarrow x>1.$

Γ3.Η εξίσωση

$$f\left(\frac{1}{x}\right)+x^2+x^6=0\overset{x\neq0}{\Leftrightarrow}f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x^2)=0\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x^2)\overset{f\ \text{περιττή}}{\Longleftrightarrow}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=f(-x^2)\overset{f\,1-1}{\Leftrightarrow}\frac{1}{x}=-x^2\Leftrightarrow x^3=-1\Leftrightarrow x=-1.$$

Γ4.Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+x}{x^2-x+1}\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-x+1}\cdot\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)=1\cdot1=1$ γιατί

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{1}{x}=y}{===}\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu y}{y}=1 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2-x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1 .$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\left[f\left(1+\frac{2}{x}\right)-f\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\overset{\frac{1}{x}=y}{=\!=}\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(1+2y)-f(y)}{y}=$

$$=\lim_{y\to 0}\left[\frac{f(1+2y)-f(1)}{y}-\frac{f(y)-f(1)}{y}\right]=\lim_{y\to 0}\left[2\cdot\frac{f(1+2y)-f(1)}{2y}-\frac{f(y)-f(1)}{y}\right]$$

$= 2f'(1)-f'(1)=f'(1).$ Αρα $f'(1)=1.$

Δ2. Είναι: $g'(x)=f'(e^x)\cdot e^x.$

Η εφαπτομένη της C_f στο $A(1,f(1))$ έχει εξίσωση:

$\varepsilon_f: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow \varepsilon_f: y-f(1)=x-1\Rightarrow \varepsilon_f: y=x+f(1)-1$

Η εφαπτομένη της C_g στο $B(0,g(0))$ έχει εξίσωση:

$\varepsilon_g: y-g(0)=g'(0)(x-0)\Rightarrow \varepsilon_g: y-f(1)+1=f'(1)(x-0)$ δηλ.

$\varepsilon_g: y=x+f(1)-1.$

Αρα ε_f και ε_g συμπίπτουν.

Δ3. Η εξίσωση

$g(x)=f(e^x)-1$ γράφεται $x^2+x=f(e^x)-1\Leftrightarrow f(e^x)=x^2+x+1$ και

αν θέσουμε $e^x=y>0$ γίνεται

$f(y)=\ln^2 y+\ln y+1,\ y>0$ άρα $f(x)=\ln^2 x+\ln x+1, x>0$.

Εχουμε τώρα:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x\cdot f'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x+\ln x+1}{x\cdot\left(2\cdot\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x+\ln x+1}{2\ln x+1}\overset{\ln x=u}{=\!=\!=\!=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{u^2+u+1}{2u+1}=\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{u^2}{2u}\right)=+\infty.$$

Δ4.Είναι: $f'(x)=2\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}$ και η $f'(e^x)=e^{-2x}$ γίνεται:

$$2\cdot\frac{\ln e^x}{e^x}+\frac{1}{e^x}=e^{-2x}\Leftrightarrow\frac{2x}{e^x}+\frac{1}{e^x}=e^{-2x}\overset{\cdot e^{2x}}{\Longleftrightarrow}2x\cdot e^x+e^x=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x\cdot e^x+e^x-1=0\Leftrightarrow g(x)=g(0)\overset{g\ 1\text{-}1}{\Longleftrightarrow}x=0$$ γιατί

$g'(x)=2e^x+2xe^x+e^x>0$ $\forall x>0$ άρα η g είναι $\nearrow$ άρα και 1-1.

Δ5.Θεωρώ την $h(x)=f(x)-\alpha=\ln^2x+\ln x+1-\alpha, x>0$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,e]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και:

$h(1)=\ln^2 1+\ln 1+1-\alpha=1-\alpha<0$ γιατί $1<\alpha<2$ και

$h(e)=\ln^2e+\ln e+1-\alpha=3-\alpha>0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένας $\xi\in(1,e)\subset A_h$ ώστε $h(\xi)=0$.