ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **114**

Β' Λυκείου

Ον/μο:………………………. **Γεν. Παιδείας**

Ύλη: Συστήματα- Ιδιότητες συναρτήσεων **03-10-20**

Θέμα 1^{ο}:

Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$ με $\alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$, παριστάνει ευθεία γραμμή . **(5μον.)**

Β. Τι ονομάζουμε λύση ενός γραμμικού συστήματος 2x2; **(5μον.)**

Γ. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; **(5μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** **Σ**ωστό ή **(Λ)** **Λ**άθος τις παρακάτω προτάσεις :

i. Η συνάρτηση $f(x)=x^2-5x+6$ είναι γνησίως μονότονη. **Σ** **Λ**

ii. Αν για το σύστημα $\left.\begin{array}{l}\alpha x+\beta y=\gamma\\ \alpha' x+\beta' y=\gamma'\end{array}\right\}$ ισχύει ότι $D=0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο . **Σ** **Λ**

iii. Αν για μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α ισχύει ότι $f(x)<5$ για κάθε $x\in A$ τότε η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το 5. **Σ** **Λ**

iv. Η συνάρτηση f με $f(x)=3x^2$, $x\in[7,15]$ είναι άρτια. **Σ** **Λ**

v. Αν ένα γραμμικό σύστημα 2x2 έχει 2 λύσεις, τότε έχει άπειρο πλήθος λύσεων. **Σ** **Λ**

(5x2=10μον.)

Θέμα 2^{ο}:

Α. Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{array}{l}\dfrac{x+y}{5}=\dfrac{x-y}{3}\\ \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{3}=\dfrac{y}{2}+1\end{array}\right\}$. **(7 μον.)**

Β. Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{array}{l}4|x|-2|y|=11\\ 6|x|-5|y|=15{,}5\end{array}\right\}$. **(6 μον.)**

Γ. Να λύσετε το σύστημα: $\left.\begin{array}{l} x+y=8 \\ x\cdot y=12 \end{array}\right\}$ και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα. **(6 μον.)**

Δ. Να λύσετε το σύστημα για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} 2x+\lambda y=\lambda-2 \\ \lambda x+2y=4\lambda-8 \end{array}\right\}$$

(6 μον.)

<u>Θέμα 3^{o}:</u>

Α. Για τις ορίζουσες D, D_x, D_y ενός γραμμικού συστήματος 2x2 ισχύει ότι: $\left.\begin{array}{l} D_x+D_y=D \\ D_x-D_y=3D \end{array}\right\}$. Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση, να τη βρείτε. **(10 μον.)**

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha}{x}-\sqrt{x}$ με $\alpha\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1)+f(4)=12$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι α=12. **(4 μον.)**

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. **(5 μον.)**

iii. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{12}{|2x-1|+1}-\frac{12}{|x+4|+1}=\sqrt{|2x-1|+1}-\sqrt{|x+4|+1}\ .$$ **(4 μον.)**

iv. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2020)$ και $f(2021)$. **(2 μον.)**

Θέμα 4ο:

Α. Να βρεθεί ένας τριψήφιος φυσικός αριθμός αν :

* Το άθροισμα των ψηφίων του είναι 21.
* Ο αριθμός ελαττώνεται κατά 9,στην περίπτωση που αλλάξει η θέση των δύο τελευταίων ψηφίων του.
* Ο αριθμός ελαττώνεται κατά 90,στην περίπτωση που αλλάξει η θέση των δύο πρώτων ψηφίων του. **(10μον.)**

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4-x^2}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
ii. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία.
iii. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f.
iv. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.
v. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x)\geq 5$

(5x3=15μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1^{o}:

Α. Σχ. Βιβλίο
Β. Σχ. Βιβλίο
Γ. Σχ. Βιβλίο
Δ. **i.**Λ **ii.**Λ **iii.** Λ **iv.**Λ **v.**Σ

Θέμα 2^{o}:

Α.Έχουμε :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x+y}{5}=\dfrac{x-y}{3}\\ \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{3}=\dfrac{y}{2}+1\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}3x+3y=5x-5y\\ 3x+3y-2x+2y=3y+6\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}-2x+8y=0\\ x+2y=6\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}-12+4y+8y=0\\ x=6-2y\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}12y=12\\ x=6-2y\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}y=1\\ x=4\end{array}\right\}. \text{ Άρα } (x,y)=(4,1).$$

Β. Έχουμε το σύστημα: $\left.\begin{array}{l}4|x|-2|y|=11\\ 6|x|-5|y|=15,5\end{array}\right\}$ (Σ).

Θέτουμε $|x|=\omega$ και $|y|=\varphi$ και το (Σ) γίνεται:

$$\left.\begin{array}{l}4\omega-2\varphi=11\\ 6\omega-5\varphi=15,5\end{array}\right\}\underset{\cdot(-2)}{\overset{\cdot 3}{\Leftrightarrow}} \left.\begin{array}{l}12\omega-6\varphi=33\\ -12\omega+10\varphi=-31\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{l}4\varphi=2\\ 4\omega-2\varphi=11\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi=\dfrac{1}{2}\\ 4\omega-1=11\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}\varphi=\dfrac{1}{2}\\ \omega=3\end{array}\right\}.$$

Οπότε $|x|=3\Leftrightarrow x=3$ ή $x=-3$ και

$$|y|=\frac{1}{2}\Leftrightarrow y=\frac{1}{2} \text{ ή } y=-\frac{1}{2}.$$

Επομένως οι λύσεις του συστήματος είναι : $(x,y)=\left(3,\frac{1}{2}\right)$ ή $(x,y)=\left(-3,\frac{1}{2}\right)$ ή $(x,y)=\left(3,-\frac{1}{2}\right)$ ή $(x,y)=\left(-3,-\frac{1}{2}\right)$.

Γ. Έχουμε : $\left.\begin{array}{l} x+y=8 \\ x\cdot y=12 \end{array}\right\}$

Αναζητούμε δύο αριθμούς που έχουν άθροισμα 8 και γινόμενο 12. Επομένως , από τους τύπους του Vieta οι αριθμοί αυτοί είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\omega^2-8\omega+12=0$. Οι ρίζες της εξίσωσης είναι ω=2 ή ω=6 . Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη (2,6) ή (6,2) .

Γεωμετρικά , έχουμε ότι η ευθεία και η υπερβολή τέμνονται σε 2 σημεία .

Δ. Έχουμε το σύστημα : $\left.\begin{array}{l} 2x+\lambda y=\lambda-2 \\ \lambda x+2y=4\lambda-8 \end{array}\right\}$

Θα βρούμε τις ορίζουσες του συστήματος . Είναι :

$$D=\begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 2 \end{vmatrix}=4-\lambda^2=(2-\lambda)(2+\lambda)$$

$$D_x=\begin{vmatrix} \lambda-2 & \lambda \\ 4\lambda-8 & 2 \end{vmatrix}=2\lambda-4-4\lambda^2+8\lambda=-4\lambda^2+10\lambda-4=$$

$$-4\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)(\lambda-2)=(-4\lambda+2)(\lambda-2)$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 2 & \lambda\text{-}2 \\ \lambda & 4\lambda\text{-}8 \end{vmatrix}=8\lambda-16-\lambda^2+2\lambda=-\lambda^2+10\lambda-16=-(\lambda-2)(\lambda-8)$$

*Αν $D\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq\pm 2$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την:

$$(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{(-4\lambda+2)(\lambda-2)}{(2-\lambda)(2+\lambda)},\frac{-(\lambda-2)(\lambda-8)}{(2-\lambda)(2+\lambda)}\right)=$$

$$\left(\frac{4\lambda-2}{\lambda+2},\frac{\lambda-8}{\lambda+2}\right)$$

$*$ Αν $D=0 \Leftrightarrow \lambda=\pm 2$ τότε:

→Αν λ=2 το σύστημα γίνεται: $\left.\begin{matrix} 2x+2y=0 \\ 2x+2y=0 \end{matrix}\right\}$ δηλαδή έχει άπειρες λύσεις της μορφής: $(x,y)=(x,-x),\ x\in\mathbb{R}$.

→Αν λ=-2 τότε $D_x=-40\neq 0$ άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

Θέμα 3^o:

Α. Εφόσον το σύστημα έχει μοναδική λύση θα είναι $D\neq 0$.Τότε:

$$\left.\begin{matrix} D_x+D_y=D \\ D_x-D_y=3D \end{matrix}\right\} \overset{:D}{\Leftrightarrow} \left.\begin{matrix} \dfrac{D_x}{D}+\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{D}{D} \\ \dfrac{D_x}{D}-\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{3D}{D} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x+y=1 \\ x-y=3 \end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow}$$

$$\left.\begin{matrix} 2x=4 \\ x+y=1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x=2 \\ y=-1 \end{matrix}\right\}. \text{ Άρα } (x,y)=(2,-1).$$

Β. i.Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha}{x}-\sqrt{x}$ ορίζεται όταν: $x\neq 0$ και $x\geq 0$, οπότε το πεδίο ορισμού της είναι $A=(0,+\infty)$. Επίσης,

$$f(1)+f(4)=12 \Leftrightarrow \alpha-1+\frac{\alpha}{4}-2=12 \Leftrightarrow 4\alpha-4+\alpha-8=48 \Leftrightarrow$$

$$5\alpha=60 \Leftrightarrow \alpha=12.$$

ii. Για α=12 είναι $f(x)=\dfrac{12}{x}-\sqrt{x}$. Έστω $x_1,x_2\in A$ με $x_1<x_2$.

$$x_1<x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2} \overset{\cdot 12}{\Leftrightarrow} \frac{12}{x_1}>\frac{12}{x_2} \quad (1)$$

$$x_1<x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1}<\sqrt{x_2} \Leftrightarrow -\sqrt{x_1}>-\sqrt{x_2} \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:

$\dfrac{12}{x_1}-\sqrt{x_1}>\dfrac{12}{x_2}-\sqrt{x_2} \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$ δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A.

iii. Έχουμε:

$$\frac{12}{|2x-1|+1}-\frac{12}{|x+4|+1}=\sqrt{|2x-1|+1}-\sqrt{|x+4|+1}\Leftrightarrow$$

$$\frac{12}{|2x-1|+1}-\sqrt{|2x-1|+1}=\frac{12}{|x+4|+1}-\sqrt{|x+4|+1}\Leftrightarrow$$

$$f\left(|2x-1|\right)=f\left(|x+4|\right)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}|2x-1|=|x+4|\Leftrightarrow$$

$$2x-1=x+4\Leftrightarrow x=5 \text{ ή } 2x-1=-x-4\Leftrightarrow 3x=-3\Leftrightarrow x=-1$$

Εφόσον $x>0$ η λύση **x=5** είναι δεκτή, ενώ η x=-1 απορρίπτεται.

iv. Είναι: $2020<2021\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f\left(2020\right)>f\left(2021\right)$.

<u>Θέμα 4ο:</u>

Α. Έστω x, y, z τα ψηφία του αριθμού. Τότε έχουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=21 \\ 100x+10y+z-9=100x+10z+y \\ 100x+10y+z-90=100y+10x+z \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l} x+y+z=21 \\ 9y-9z=9 \\ 90x-90y=90 \end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll} x+y+z=21 & (1) \\ y-z=1 & (2) \\ x-y=1 & (3) \end{array}\right\}$$

Προσθέτουμε τις (1), (2), (3) κατά μέλη και προκύπτει $2x+y=23$ (4).

$$\left.\begin{array}{l}(4)\\(3)\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l} 2x+y=23 \\ x-y=1 \end{array}\right\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l} 3x=24 \\ x-y=1 \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l} x=8 \\ y=7 \end{array}\right\}.$$

Για x=8 και y=7 έχουμε ότι z=6. Επομένως, ο ζητούμενος αριθμός είναι το 876.

B.i. Η $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ ορίζεται όταν:

$4-x^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2\leq 4 \Leftrightarrow |x|\leq 2 \Leftrightarrow -2\leq x\leq 2$. Άρα $A=[-2,2]$.

ii. Έστω $x_1,x_2\in A$ με $x_1<x_2$.

→ Αν $x_1,x_2\in[0,2]$ τότε:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^2<x_2^2 \Leftrightarrow -x_1^2>-x_2^2 \Leftrightarrow 4-x_1^2>4-x_2^2 \Leftrightarrow$

$\sqrt{4-x_1^2}>\sqrt{4-x_2^2} \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

Δηλαδή, η f είναι γνησίως φθίνουσα.

→ Αν $x_1,x_2\in[-2,0]$ τότε:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^2>x_2^2 \Leftrightarrow -x_1^2<-x_2^2 \Leftrightarrow 4-x_1^2<4-x_2^2 \Leftrightarrow$

$\sqrt{4-x_1^2}<\sqrt{4-x_2^2} \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Δηλαδή, η f είναι γνησίως αύξουσα.

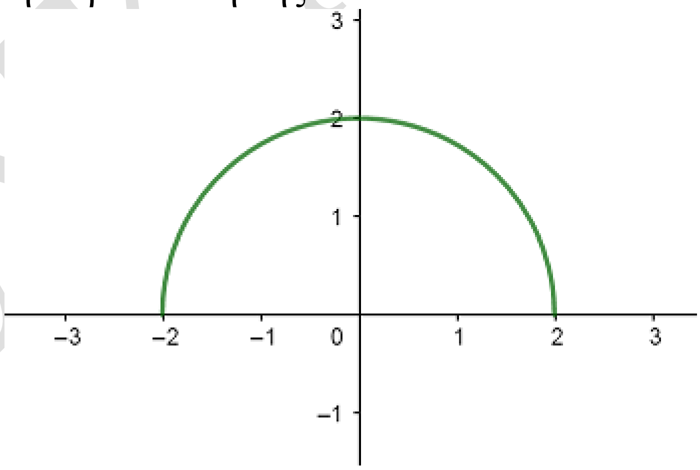
iii. Είναι:

$x^2\geq 0 \Leftrightarrow -x^2\leq 0 \Leftrightarrow 4-x^2\leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2}\leq 2 \Leftrightarrow f(x)\leq 2$

Δηλαδή η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το y=2 για x=0.

Επίσης, $\sqrt{4-x^2}\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq 0$, δηλαδή η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το y=0 για $x=\pm 2$.

iv. Η γραφική παράσταση της f είναι:



v. Η $f(x)\geq 5$ είναι αδύνατη εφόσον $0\leq f(x)\leq 2$.